第45卷第1期
2002年1月

数　学　学　报
ACTA MATHEMATICA SINICA

Vol.45, No.1
Jan., 2002

文章编号: 0583-1431(2002)01-0093-12　　**文献标识码**:　A

中立型微分方程零解的稳定性与全局 Hopf 分支

魏俊杰

(东北师范大学数学系　吉林　长春　130024)
(E-mail: weijj@nenu.edu.cn)

阮士贵

(Dalhousie 大学数理统计与计算科学系　加拿大)
(E-mail: ruan@mscs.dal.ca)

摘　要　本文用 Rouche 定理建立起关于一般的超越函数的零点分布定理，以此定理为基础，结合应用吴建宏等用等变拓扑度理论建立起的一般泛函微分方程的 Hopf 分支定理, 研究了描述无损传输网络线路的中立型微分方程的零解的稳定性和全局 Hopf 分支.

关键词　中立型；稳定性；全局 Hopf 分支
MR(2000) 主题分类　34K15
中图分类　O175.7

Stability and Global Hopf Bifurcation for Neutral Differential Equations

WEI Jun Jie

(*Department of Mathematics, Northeast Normal University, Jilin* 130024, *P. R. China*)
(*E-mail: weijj@nenu.edu.cn*)

RUAN Shi Gui

(*Department of Mathematics and Statistics, Dalhousie University, Halifax, Nova Scotia, Canada*)
(*E-mail: ruan@mscs.dal.ca*)

Abstract　In this paper, we first establish a basic theorem on zeros of general transcendental functions. Based on the basic theorem, combining the global Hopf bifurcation theorem for general functional differential equations, which was established by Wu J. H. al using degree theory methods, we investigate the stability and global Hopf bifurcation for a lossless transmission line network which is described by a one delay differential-difference equation of neutral type.

Keywords　Neutral type; Stability; Global Hopf bifurcation
MR(2000) Subject Classification　34K15
Chinese Library Classification　O175.7

收稿日期:　1999-08-23;　接受日期:　2000-12-18
基金项目：国家自然科学基金资助项目 (19831030); 加拿大自然科学与工程研究基金资助项目

1 引言

自 Brayton R. 在文 [1] 中提出描述无损传输线路的中立型微分方程

$$\frac{d}{dt}[x(t)-qx(t-r)]=-ax(t)-qbx(t-r)+h(x(t),x(t-r)) \tag{1}$$

以来，许多学者从不同角度对其进行研究 (参阅文献 [1–7]), 尤其 Krawcewicz, Wu 和 Xia 近年在文 [3, 4] 中以 q 为参数讨论了 (1) 及其耦合系统的全局 Hopf 分支. 众所周知，当一个系统的平衡点的稳定性随参数的变化而发生翻转时，该系统将要产生 Hopf 分支. 很自然的一个问题是：方程 (1) 的平衡点的稳定性是如何依赖于参数 q 的？回答此问题将有助于人们理解以 q 为参数， (1) 产生 Hopf 分支这一现象. 同时，对时滞微分方程，倍受关注的一个问题是 "滞量是如何影响其解的拓扑结构的？". 对系统 (1), 自然要问，其平衡点的稳定性是如何依赖于时滞 r 的？以滞量 r 为参数， (1) 是否存在全局 Hopf 分支？本文回答了上述诸问题. 另外，对中立型微分方程, 文 [8] 已举出例子表明, 既使线性中立型方程的所有特征根都具严格负实部, 其零解也未必是稳定的. 本文在研究 (1) 的零解稳定性对参数的依赖关系时，还要克服这一困难. 关于稳定性的结果也改进了 Ferreira J.[5] 的工作.

2 超越方程零点分布分析及应用

在本节中，我们给出关于超越方程零点分布分析的一般性结果及在中立型方程中的应用，以备下节使用.

定理 2.1 假设 $B\subset R^n$ 是一连通开集， $g(\lambda,\mu)$ 关于 $(\lambda,\mu)\in C\times B$ 连续，关于 $\lambda\in C$ 解析, 且 $g(\lambda,\mu)$ 在右半平面 $\{\lambda\in C\,|\,\mathrm{Re}\lambda\geq 0\}$ 上的零点一致有界. 若对任意 $\mu\in B_1\subset B$, $g(\lambda,\mu)$ 在虚轴上无零点, 则 $g(\lambda,\mu)$ 在右半开平面 $\{\lambda\in C\,|\,\mathrm{Re}\lambda>0\}$ 上的零点重数之和关于 B_1 是一定数, 即 $g(\lambda,\mu)$ 位于右半开平面上零点重数之和与参数 $\mu\in B_1$ 无关. 其中 B_1 是有界连通闭集.

证明 由 $g(\lambda,\mu)$ 位于右半平面零点一致有界，存在 $L>0$, 使 $g(\lambda,\mu)=0$ 的满足 $\mathrm{Re}\lambda\geq 0$ 的根满足 $|\lambda|<L$. 记

$$A=\{\lambda\,|\,\mathrm{Re}\lambda\geq 0,\,|\lambda|\leq L\},$$

InA 为 A 的内部及 ∂A 为 A 的边界. 由条件及 A 的定义知 $g(\lambda,\mu)$ 在 ∂A 上无零点. 从而由文献 [9] 的定理 9.17.4 知，对每个 $\mu_0\in B_1$, 存在它的一开邻域 $W(\mu_0)\subset B$, 使对任意 $\mu\in W(\mu_0)$, $g(\lambda,\mu)$ 在 InA 上的零点重数之和相同.

显然， $\bigcup_{\mu_0\in B_1}W(\mu_0)$ 构成 B_1 的一个开覆盖，于是由有限覆盖定理知存在整数 $N>0$ 使 $B_1\subset\bigcup_{i=1}^N W(\mu_0^i)$. 由于 $g(\lambda,\mu)$ 位于 InA 上的零点重数之和关于 $W(\mu_0^i)$ 是一常数，而 $\{W(\mu_0^i)\}_{1\leq i\leq N}$ 至少两两相交, 从而 $g(\lambda,\mu)$ 在 InA 上的零点重数之和关于 $\bigcup_{i=1}^N W(\mu_0^i)$ 是一常数. 结论得证.

考虑多滞量线性中立型微分方程组

$$\frac{d}{dt}\left[x(t)+\sum_{j=1}^{k_1}A_jx(t-\tau_j)\right]=\sum_{i=1}^{k_2}B_ix(t-\sigma_i), \tag{2.1}$$

其中 τ_j $(j=1,2,\ldots,k_1)$ 是正常数， σ_i $(i=1,2,\ldots,k_2)$ 是非负常数， $x\in R^n, A_j, B_i$ $(j=$

$1,\ldots,k_1, i=1,\ldots,k_2$) 都是常数阵. (2.1) 的特征方程为

$$\det\left(\lambda I+\lambda\sum_{j=1}^{k_1}A_j\mathrm{e}^{-\lambda\tau_j}-\sum_{i=1}^{k_2}B_i\mathrm{e}^{-\lambda\sigma_i}\right)=0.$$

展开其左端可得

$$\lambda^n(1+q\mathrm{e}^{-\lambda\tau_0})+g(\lambda,\tau,\sigma)=0, \tag{2.2}$$

其中 τ_0 是 $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_{k_1})$ 中某些无素之和, $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_{k_2})$, $g(\lambda,\tau,\sigma)$ 是关于 λ 次数不高于 $n-1$ 的指数多项式, q 是 A_j $(j=1,\ldots,k_1)$ 的某些无素的组合.

引理 2.2 对 $(q,\tau,\sigma)\in[-1+\epsilon,1-\epsilon]\times R_+^{k_1}\times R_+^{k_2}$, 方程 (2.2) 位于右半平面的根是一致有界的，其中 $0<\epsilon<1$.

证明 由于 $g(\lambda,\tau,\sigma)$ 关于 λ 的次数不高于 n–1 及诸项中的指数函数因子的形式为 $\mathrm{e}^{-(\tau^0,\sigma^0)\lambda}$, 其中 ($\tau^0$, σ^0) 是由 τ 和 σ 中的无素组合成的非负数，故存在 $M>0$ 和 $N>0$, 使 $|\lambda|\geq N$ 时有 $\frac{|g(\lambda,\tau,\sigma)|}{|\lambda^{n-1}|}<M$. 于是由 (2.2) 知，当 $|\lambda|>N$ 且 $\mathrm{Re}\lambda\geq0$ 时

$$|\lambda|\leq\frac{1}{1-|q|}\frac{|g(\lambda,\tau,\sigma)|}{|\lambda|^{n-1}}<\frac{M}{\epsilon}.$$

从而，若 λ 是 (2.2) 的具非负实部的根，必有 $|\lambda|<\max\{N,\frac{M}{\epsilon}\}$.

引理 2.3 对方程 (2.2), 若 $|q|<1$, 且其所有根都具严格负实部，则存在 $\delta>0$, 使其任一根 λ 满足 $\mathrm{Re}\lambda<-\delta$.

证明 由文献 [10] 第六章定理 2.1 知，若上述的 $\delta>0$ 不存在，则必有 $|q|=1$, 结论得证.

定理 2.4 若 $|q|<1$ 且 (2.2) 所有根都具严格负实部，则 (2.1) 的零解是一致渐近稳定的.

该结论可由引理 2.3 和文献 [6] 中的第 9 章推论 4.1 直接得到.

3 无损传输线路方程零解稳定性与局部 Hopf 分支

对方程 (1), 我们总假设

$$h(0)=h'_{x_1}(0,0)=h'_{x_2}(0,0)=0. \tag{H$_1$}$$

于是，(1) 在平衡解 $x=0$ 处的线性部分为

$$\frac{d}{dt}[x(t)-qx(t-r)]=-ax(t)-qbx(t-r). \tag{3.1}$$

其特征方程为 $\lambda[1-q\mathrm{e}^{-\lambda r}]+qb\mathrm{e}^{-\lambda r}+a=0$, 即

$$(\lambda+a)\mathrm{e}^{\lambda r}-q(\lambda-b)=0. \tag{3.2}$$

引理 3.1 若 $0<a<b$, 则

(i) 方程

$$\tan\beta r=\frac{(a+b)\beta}{\beta^2-ab} \tag{3.3}$$

具有可列个正根 $\{\beta_j\}_{1\leq j\leq\infty}$ 满足 $\beta_{j+1}>\beta_j>0$, $\lim_{j\to\infty}\beta_j=\infty$, 且

(a) 当 $\sqrt{ab}<\frac{\pi}{2r}$ 时

$$\beta_j\in\left(\frac{(j-1)\pi}{r},\frac{(2j-1)\pi}{2r}\right),\quad j\geq 1;$$

(b) 当 $\sqrt{ab}=\frac{(2m-1)\pi}{2r}$ 时

$$\beta_j\in\begin{cases}\left(\dfrac{(2j-1)\pi}{2r},\dfrac{j\pi}{r}\right), & 1\leq j\leq m-1;\\ \left(\dfrac{j\pi}{r},\dfrac{(2j+1)\pi}{2r}\right), & j\geq m;\end{cases}$$

(c) 当 $\frac{(2m-1)\pi}{2r}<\sqrt{ab}<\frac{(2m+1)\pi}{2r}$ 时

$$\beta_j\in\begin{cases}\left(\dfrac{(2j-1)\pi}{2r},\dfrac{j\pi}{r}\right), & 1\leq j\leq m;\\ \left(\dfrac{(j-1)\pi}{r},\dfrac{(2j-1)\pi}{2r}\right), & j\geq m+1.\end{cases}$$

其中 $m\geq 1$ 是一整数.

(ii) $\pm\mathrm{i}\beta_j$ 是方程 (3.2) 当 $q=q_j$ 时的纯虚根. 其中, 当 $\sqrt{ab}<\frac{\pi}{2r}$ 时

$$q_j=\frac{\beta_j\cos\beta_j r+a\sin\beta_j r}{\beta_j};$$

当 $\sqrt{ab}=\frac{(2m-1)\pi}{2r}$ 时

$$q_j=\begin{cases}\dfrac{-a\cos\beta_j r+\beta_j\sin\beta_j r}{b}, & 1\leq j\leq m-1,\\ \dfrac{\beta_j\cos\beta_j r+a\sin\beta_j r}{\beta_j}, & j\geq m;\end{cases}$$

当 $\frac{(2m-1)\pi}{2r}<\sqrt{ab}<\frac{(2m+1)\pi}{2r}$ 时

$$q_j=\begin{cases}\dfrac{-a\cos\beta_j r+\beta_j\sin\beta_j r}{b}, & 1\leq j\leq m,\\ \dfrac{\beta_j\cos\beta_j r+a\sin\beta_j r}{\beta_j}, & j\geq m+1;\end{cases}$$

且 q_j 满足 $|q_j|=\left[\frac{\beta_j^2+a^2}{\beta_j^2+b^2}\right]^{\frac{1}{2}}<1$.

(iii) 令 $\lambda(q)=\alpha(q)+\mathrm{i}\omega(q)$ 为方程 (3.2) 的满足 $\alpha(q_j)=0,\omega(q_j)=\beta_j$ 的根, 则有 $\mathrm{Sgn}\left(\frac{d\alpha(q_j)}{dq}\right)=\mathrm{Sgn}q_j$.

证明 (i) 用 Γ_1 和 Γ_2 分别表示函数 $y=\frac{(a+b)\beta}{\beta^2-ab}$ 和 $y=\tan\beta r$ 位于 (β,y) 平面的右半平面曲线, 于是, Γ_1 和 Γ_2 的交点 (β,y) 中的 β 即为 (3.3) 的根.

(a) 当 $\sqrt{ab}<\frac{\pi}{2r}$ 时, 如图 1 所示, Γ_1 和 Γ_2 有可列个交点 (β_j,y_j), 而 $\beta_j\in\left(\frac{(j-1)\pi}{r},\frac{(2j-1)\pi}{2r}\right)$.

(b) 和 (c) 的证明类似，略.

图 1

(ii) 若 $\mathrm{i}\beta$ $(\beta>0)$ 是方程 (3.2) 的根，其充要条件是 β 满足

$$\beta\sin\beta r-a\cos\beta r=qb,\quad a\sin\beta r+\beta\cos\beta r=q\beta. \tag{3.4}$$

由此得方程 (3.3), 即

$$\tan\beta r=\frac{(a+b)\beta}{\beta^2-ab}.$$

从而对 (i) 中定义的 β_j, 令

$$q_j=\frac{a\sin\beta_j r+\beta_j\cos\beta_j r}{b}\quad 或者\quad q_j=\frac{\beta_j\sin\beta_j r-a\cos\beta_j r}{b},$$

那么 (q_j,β_j) 是方程 (3.4) 的解，从而 $\mathrm{i}\beta_j$ 是 (3.2) 当 $q=q_j$ 时的根.

将 (3.4) 的每个等式两端平方相加得

$$q^2=\frac{\beta^2+a^2}{\beta^2+b^2},$$

于是 (q_j,β_j) 满足

$$q_j^2=\frac{\beta_j^2+a^2}{\beta_j^2+b^2},$$

显然由 (i) 知 $\lim_{j\to\infty}\beta_j=\infty$, 且由 $b>a>0$ 知 $q_j^2<1$ 及 $\lim_{j\to\infty}|q_j|=1$.

(iii) 对 (3.2) 两端关于 q 求导且把 q_j 代入上式，有

$$\left.\frac{d\lambda}{dq}\right|_{q=q_j}=\frac{-b+i\beta_j}{(\cos\beta_j r-q_j-rq_jb)+i(rq_j\beta_j+\sin\beta_j r)},$$

这表明

$$\alpha'(q_j)=\frac{1}{\triangle}[bq_j+rq_jb^2-b\cos\beta_j r+rq_j\beta_j^2+\beta_j\sin\beta_j r], \tag{3.5}$$

其中 $\triangle=(\cos\beta_j r-q_j-rq_jb)^2+(rq_j\beta_j+\sin\beta_j r)^2$. 由 (3.4) 的第二个方程，我们有

$$\frac{a}{\beta_j}\sin\beta_j r=q_j-\cos\beta_j r,$$

将其代入 (3.5) 得

$$\alpha'(q_j)=\frac{1}{\triangle}\Big[\Big(\frac{ab}{\beta_j}+\beta_j\Big)\sin\beta_j r+q_j(b^2r+\beta_j^2r)\Big]. \tag{3.6}$$

由 (i) 不难发现

$$\mathrm{Sgn}q_j=\mathrm{Sgn}\sin\beta_j r,$$

从而由 (3.6) 即得 (iii) 的结论. 证毕.

由引理 3.1 的 (ii), 可以看到 $|q_{j+1}|>|q_j|$, 且 $\{q_j:q_j>0\}$ 和 $\{q_j:q_j<0\}$ 都是可列集合. 为方便，不妨把上述集合分别记为 $\{q_k\}$ 和 $\{q_{-k}\}$, $k=1,2,\dots$, 其中 $q_{-(k+1)}<q_{-k}$, $q_{k+1}>q_k$.

引理 3.2 对方程 (3.2), 若 $0<a<b$, 则

(i) 当 $q\in(q_{-1},q_1)$ 时，其所有根都具严格负实部;

(ii) 当 $q\in[q_{-(k+1)},\,q_{-k})\cup(q_k,q_{k+1}]$ 时， (3.2) 具正实部的根的重数之和为 $2k$.

证明 对任意 $\epsilon>0$, 由引理 2.2 知 (3.2) 的位于右半平面的根关于 $q\in[-1+\epsilon,\,1-\epsilon]$ 是一致有界的.

当 $q=0$ 时， (3.2) 化为 $(\lambda+a)\mathrm{e}^{\lambda r}=0$, 显然其根为 $\lambda=-a<0$, 即 $q=0$ 时， (3.2) 位于右半平面根的重数之和为零.

由引理 3.1 知， q_{-1} 和 q_1 是使 (3.2) 在虚轴上出现根的最大的负 q 值和最小的正 q 值, 即 $q\in(q_{-1},q_1)$ 时， (3.2) 在虚轴上无根，于是由定理 2.1 和上面的讨论得 $q\in(q_{-1},q_1)$ 时, (3.2) 的所有根都具严格负实部，结论 (i) 得证.

可断言当 $q=q_1$ 时，(3.2) 无具正实部根. 若不然, 记其具正实部的根为 $\lambda(q)$, $\mathrm{Re}\lambda(q_1)>0$. 由根关于参数连续性知，当 $q<q_1$ 且充分靠近 q_1 时仍有 $\mathrm{Re}\lambda(q)>0$, 与结论 (i) 矛盾.

由引理 3.1, 记当 $q=q_k$ 时 (3.2) 的唯一一对纯虚根为 $\pm\mathrm{i}\beta_k$, 由 (3.2) 的位于右半平面的根关于 $q\in[-1+\epsilon,\,1-\epsilon]$ $(0<\epsilon<1)$ 一致有界性，存在 $K>0$, 使当 $q\in[-1+\epsilon,1-\epsilon]$ 时， (3.2) 的满足 $\mathrm{Re}\lambda\ge0$ 的根有 $|\lambda|<K$. 记

$$\Omega=\{\lambda\,|\,\mathrm{Re}\lambda\ge0,\,|\lambda|<K\},$$

那么 $q\in[-1+\epsilon,\,1-\epsilon]$ 时， (3.2) 位于右半平面的根都位于 Ω 内.

由于 (3.2) 的零点是孤立的，故可选 $A>0$ 适当小，使分别以 $(0,\beta_1)$ 和 $(0,-\beta_1)$ 为心， A 为半径的开圆 O_+ 和 O_- 的闭包上无 (3.2) 当 $q=q_1$ 的 $\pm\mathrm{i}\beta_1$ 外的其它零点. 于是 $q=q_1$ 时在 $\Omega\backslash O_+\cup O_-$ 的边界上无零点. 从而由 [9] 的定理 9.17.14 知存在 $\delta>0$, 当 $0\le q-q_1<\delta$ 时， (3.2) 在 $\Omega\backslash O_+\cup O_-$ 上的零点重数之和相同. 而 $q=q_1$ 时， (3.2) 在 $\Omega\backslash O_+\cup O_-$ 上无零点，得 $0<q-q_1<\delta$ 时， (3.2) 在该域上无零点. 而在 O_+ 上，由于 (3.2) 当 $q=q_1$ 时有一个零点，于是知当 $0<q-q_1<\delta$ 时， (3.2) 在 O_+ 上仅有一个零点. 另一方面，由引理 3.1 知， $\alpha'(q_1)>0$, 可知当 $q>q_1$ 且充分靠近 q_1 时， (3.2) 有一个具正实部的根位于 O_+ 内. 得当 $q>q_1$ 且充分靠近 q_1 时， (3.2) 仅有一个具正实部的根位于 O_+ 内. 同理可证当 $q>q_1$ 且允分靠近 q_1 时， (3.2) 仅有一个具正实部根位于 O_- 内. 综上，当 $q>q_1$ 且充分靠近 q_1 时, (3.2) 恰有两个具正实部的根位于 Ω 内. 即对如此的 $q>q_1$, (3.2) 恰有两个具正实部的根.

另一方面，由引理 3.1, 当 $q\in(q_1,q_2)$ 时， (3.2) 在虚轴上无根，于是由定理 2.1 知，当 $q\in(q_1,q_2)$ 时， (3.2) 具正实部的根的重数之和为 2.

下面证 $q=q_2$ 时，(3.2) 的具正实部的根的重数也是 2. 只要注意类似上面讨论，可得当 $q<q_2$ 且充分靠近 q_2 时，(3.2) 具正实部根的重数之和与 $q=q_2$ 时，(3.2) 具正实部根的重数之和相同，即得结论.

于是可用归纳法，类似上面讨论能证得 $q\in(q_k,q_{k+1}]$ 时，(3.2) 具正实部根的重数之和为 $2k$. 关于 $q\in[q_{-(k+1)},q_{-k})$ 时，结论证明完全类似，略.

定理 3.3 若 (H_1) 成立，且 $0<a<b$, 则

(i) $q\in(q_{-1},q_1)$ 时，方程 (1) 的零解是指数渐近稳定的；当 $q\in(-1,q_{-1})\cup(q_1,1)$ 时，(1) 的零解是不稳定的;

(ii) $q=q_j$ $(j=1,2,\ldots)$ 是方程 (1) 的 Hopf 分支值.

证明 (i) 由引理 3.2 的 (i) 和定理 2.4 知 (3.1) 的零解是一致渐近稳定的，应用 Hale J. 与 Lnuel S. V.[6] 第 9 章的定理 5.2 即得结论.

结论 (ii) 可由 Wu J. 和 Xia H.[4] 附录中的定理 A 得到.

下面我们以滞量 r 为参数讨论 (1) 的零解的稳定性与局部 Hopf 分支.

$\mathrm{i}\beta$ $(\beta>0)$ 是 (3.2) 的根的充要条件是 β 满足

$$\begin{cases} a\cos\beta r-\beta\sin\beta r=-bq,\\ a\sin\beta r+\beta\cos\beta r=\beta q,\end{cases}$$

该方程组等价于

$$\begin{cases} \sin\beta r=\dfrac{q\beta(a+b)}{a^2+\beta^2},\\ \cos\beta r=\dfrac{q(\beta^2-ab)}{a^2+\beta^2},\end{cases}\tag{3.7}$$

且 β 必满足

$$\beta^2=\frac{q^2b^2-a^2}{1-q^2}.\tag{3.8}$$

引理 3.4 若 $|q|<1$, 则对所有 $r\geq 0$, 方程 (3.2) 所有根都具严格负实部的充要条件是 $qb+a>0$ 和 $qb-a\leq 0$.

证明 必要性. 若结论不真，即 $qb+a\leq 0$ 或 $qb-a>0$. 由于 $r=0$ 时，(3.2) 的根为

$$\lambda=-\frac{qb+a}{1-q},$$

由条件必有 $qb+a>0$. 从而应 $qb+a>0$ 且 $qb-a>0$. 于是

$$\beta_0=\sqrt{\frac{q^2b^2-a^2}{1-q^2}}\tag{3.9}$$

有意义.

令

$$r_0=\frac{1}{\beta_0}\mathrm{arcsin}\Big(\frac{q\beta_0(a+b)}{a^2+\beta_0^2}\Big),$$

由此知 (r_0,β_0) 是 (3.7) 的解，即 $\mathrm{i}\beta_0$ 是当 $r=r_0$ 时 (3.2) 的根，与条件矛盾，必要性得证.

充分性. 由 $qb+a>0$, 当 $r=0$ 时, (3.2) 的根是

$$\lambda=-\frac{qb+a}{1-q}<0,$$

即 $r=0$ 时, (3.2) 位于右半平面根的重数之和为零. 同时, 由条件知 (3.8) 无正解 β, 即对任意 $r\geq 0$, (3.2) 无纯虚根, 显然 (3.2) 也无零根, 于是由引理 2.2 和定理 2.1 即得结论.

引理 3.5 假设 $|q|<1$, $qb+a>0$ 且 $qb-a>0$, 则有

(i) 当 $r=r_j$ 时, 方程 (3.2) 有一对纯虚根 $\pm\mathrm{i}\beta_0$, 其中 β_0 由 (3.9) 定义, 且

$$r_j=\frac{1}{\beta_0}\Big[\arccos\Big(\frac{q^2b-a}{q(b-a)}\Big)+2j\pi\Big],\quad j=0,1,\ldots. \tag{3.10}$$

(ii) 以 $\lambda(r)=\alpha(r)+\mathrm{i}\omega(r)$ 表示 (3.2) 满足

$$\alpha(r_j)=0,\quad \omega(r_j)=\beta_0$$

的根, 那么

$$\alpha'(r_j)>0,\quad j=0,1,2,\ldots.$$

(iii) 当 $r\in[0,r_0)$ 时, (3.2) 的所有根都具严格负实部; 当 $r\in(r_j,r_{j+1}]$ 时, (3.2) 的具正实部的根的重数之和是 $2(j+1)$, $j=0,1,2,\ldots$.

证明 由假设知 (3.9) 有意义, 于是由 (3.7) 的第二个方程定义 r_j 得 (3.10). 从而得 $\pm\mathrm{i}\beta_0$ 是 (3.2) 当 $r=r_j$ 时的纯虚根, 显然是唯一一对纯虚根. (i) 得证.

由 (3.2), 我们有

$$\frac{d\lambda}{dr}=-\frac{q\lambda(\lambda+a)(\lambda-b)}{q(\lambda-b)[1-r(\lambda+a)]-q(\lambda+a)},$$

从而

$$(\frac{d\lambda}{dr})^{-1}=-\Big[\frac{1}{\lambda(\lambda+a)}-\frac{1}{\lambda(\lambda-b)}-\frac{r}{\lambda}\Big].$$

把 r_j 代入得

$$\mathrm{Re}\Big[\Big(\frac{d\lambda}{dr}\Big)^{-1}_{r=r_j}\Big]=\frac{b^2-a^2}{(\beta_0^2+a^2)(\omega_0^2+b^2)}.$$

于是由假设得

$$\mathrm{Re}\Big[\Big(\frac{d\lambda}{dr}\Big)^{-1}_{r=r_j}\Big]>0,$$

即 $\mathrm{Re}(\frac{d\lambda}{dr}|_{r=r_j})>0$. (ii) 得证.

显然, $r=0$ 时, (3.2) 的根为

$$\lambda=-\frac{qb+a}{1-q}<0.$$

于是由引理 2.2 和定理 2.1 得 $r\in[0,r_0)$ 时, (3.2) 的所有根都具严格负实部.

(iii) 的第二个结论的证明完全类似于引理 3.2 的 (ii) 的证明, 略.

定理 3.6 设 $|q|<1$ 且 (H_1) 成立, 则

(i) 方程 (1) 的零解绝对稳定的充要条件是 $qb+a>0$ 和 $qb-a\le 0$.

(ii) 当 $qb+a>0$ 和 $qb-a>0$ 时，对 $r\in[0,r_0)$, 方程 (1) 的零解是指数渐近稳定的；对 $r>r_0$, (1) 的零解是不稳定的； $r=r_j$ $(j=0,1,2,\ldots)$ 是方程 (1) 的 Hopf 分支值.

应用引理 3.4, 定理 2.4 和 [6, 第 9 章的定理 5.2] 可得结论 (i); 应用引理 3.5 的 (iii) 同理可得结论 (ii) 中的前部分；应用引理 3.5 的 (i) 和 (ii) 及文 [4] 附录中的定理 A 即知方程 (1) 在每个 r_j $(j=0,1,2,\ldots)$ 处都经历 Hopf 分支.

4 无损传输线路方程的全局 Hopf 分支

本节我们以时滞 r 为参数研究中立型方程

$$\frac{d}{dt}[x(t)-qx(t-r)]=-ax(t)-qbx(t-r)-g(x(t))+qg(x(t-r)) \tag{4.1}$$

的全局 Hopf 分支，即周期解的全局存在性. 事实上， Brayton 在文 [1] 中引入的无损传输线路方程即为 (4.1) 的特殊形式，其中 $g(x)=x^3$. 为方便，作时间变换 $t=rs$ 及 $y(s)=x(rs)$, 且仍用 t 表示自变量 s, 则 (4.1) 化为

$$\frac{d}{dt}[y(t)-qy(t-1)]=-ary(t)-rqby(t-1)-rg(y(t))+rqg(y(t-1)). \tag{4.2}$$

假设

(P_1) $g\in c^3(R,R)$, $g(0)=g'(0)=0$.

在条件 (P_1) 下， (4.2) 在 $y=0$ 处的线性化方程的特征方程为

$$(z+ar)\mathrm{e}^z-q(z-br)=0. \tag{4.3}$$

把 (4.3) 与 (3.2) 比较，不难发现 $\lambda=rz$. 于是由引理 3.5, 可得

引理 4.1 假设 $|q|<1$, $qb+a>0$ 且 $qb-a>0$, 则有

(i) 当 $r=r_j$ 时方程 (4.3) 有一对纯虚根 $\pm\mathrm{i}\frac{\beta_0}{r_j}$, 其中 r_j 由 (3.10) 定义， β_0 由 (3.9) 定义；

(ii) 以 $z(r)=\gamma(r)+\mathrm{i}\omega(r)$ 表示 (4.3) 的满足

$$\gamma(r_j)=0,\quad \omega(r_j)=\frac{\beta_0}{r_j}$$

的根，有

$$\gamma'(r_j)=\frac{1}{r_j}\alpha'(r_j)>0,\quad j=0,1,\ldots;$$

(iii) 当 $r\in(0,r_0)$ 时，方程 (4.3) 所有根皆具严格负实部；当 $r\in(r_j,r_{j+1}]$ 时， (4.3) 的具正实部根的重数之和是 $2(j+1)$, $j=0,1,2,\ldots$.

应用 Krawcewicz, Wu 和 Xia 在文 [3] 中的引理 6.3 可得：

引理 4.2 如果 $|q|<1$ 且 (P_1) 成立，则对任意正整数 m, 方程 (4.2) 都没有周期为 $\frac{2}{m}$ 的非常数周期解.

引理 4.3 若 $|q|<1$, 则对 $r=0$, 方程 (4.2) 没有非常数周期解.

证明 当 $r=0$ 时，方程 (4.2) 为

$$\frac{d}{dt}[y(t)-qy(t-1)]=0. \tag{4.4}$$

于是对 (4.4) 的任一解 $y(t)$, 存在常数 c 使

$$y(t)=c+qy(t-1).$$

上式表明对 $t\in[n,n+1]$, 有

$$y(t)=c+q[c+qy(t-2)]=c+cq+q^2[c+qy(t-3)]=c\sum_{i=0}^{n-1}q^i+q^n y(t-n).$$

由 $|q|<1$, $t-n\in[0,1]$ 及 $y(t)$ 的连续性知

$$\lim_{t\to+\infty}y(t)=\frac{c}{1-q}.$$

从而知 (4.4) 无非常数周期解.

引理 4.4 假设 $0<a<b$,

(i) $yg(y)>0$ 当 $y\neq 0$ 时;

(ii) $g(y)$ 关于 y 不减;

(iii) 当 $y\to\pm\infty$ 时， $g(y)/y\to\infty$;

(iv) $q\in(0,1)$ 且满足 $\lim_{y\to\pm\infty}\frac{g(qy)-qg(y)}{qy}<-(a+b)$.

则存在 $M>0$, 使方程 (4.2) 的任意非常数周期解 $y(t)$ 有 $|y(t)|<M$ 对 $t\in R$ 成立.

证明 仅证存在 M, 使 (4.2) 的任意非常数周期解 $y(t)$, 有 $y(t)\le M$, 至于 $y(t)\ge -M$ 的证明类似.

由于 $y(t)$ 是周期函数，故存在 $t\in R$, 使

$$y(t)-y(t-1)=\max_{s\in R}[y(s)-qy(s-1)]. \tag{4.5}$$

于是对每一 $s\in R$, 有

$$y(s)\le qy(s-1)+[y(t)-qy(t-1)].$$

由此可得

$$y(s)\le q^2y(s-2)+(1+q)[y(t)-qy(t-1)].$$

可用归纳法证得对任一自然数 m, 有

$$y(s)\le q^my(s-m)+\frac{1-q^m}{1-q}[y(t)-qy(t-1)].$$

令 $m\to\infty$, 有

$$y(s)\le\frac{y(t)-qy(t-1)}{1-q}.$$

对上面的 t, 也有

$$y(t) \le \frac{y(t) - qy(t-1)}{1-q},$$

即 $-qy(t) \le -qy(t-1)$. 由 $-q < 0$, 故 $y(t) \ge y(t-1)$.

由 t 的定义，有 $\frac{d}{dt}[y(t) - qy(t-1)] = 0$, 于是由 (4.2), 有

$$ay(t) + qby(t-1) = -g(y(t)) + qg(y(t-1)). \tag{4.6}$$

分两种情形：

情形 1 $y(t) > 0$, 此时必有 $y(t-1) < 0$. 若不然，即 $y(t-1) \ge 0$, 那么 (4.6) 的左端为正，但是其右端

$$-g(y(t)) + qg(y(t-1)) = g(y(t))\Big[-1 + q\frac{g(y(t-1))}{g(y(t))}\Big],$$

由 $y(t) \ge y(t-1) \ge 0$ 及 g 的不减必性知 $-1 + q\frac{g(y(t-1))}{g(y(t))} < 0$, 即 (4.6) 右端为负．该矛盾说明 $y(t-1) < 0$.

把 (4.6) 写为

$$ay(t) + g(y(t)) = qy(t-1)\Big[\frac{g(y(t-1))}{y(t-1)} - b\Big]. \tag{4.7}$$

由 $y(t) > 0$ 和 $y(t-1) < 0$ 及 (i) 知 $\frac{g(y(t-1))}{y(t-1)} < b$. 于是由 $\lim_{u\to\infty}\frac{g(u)}{u} = \infty$ 知存在 $M_1 > 0$, 使 $y(t-1) \ge -M_1$. 从而由 (4.7), 得

$$ay(t) + g(y(t)) \le \max_{-M_1 \le u \le 0} q[g(u) - bu].$$

从而知存在 $M_2 > 0$ 使 $y(t) \le M_2$, 于是有 $y(t) - qy(t-1) \le M_2 + qM_1$. 注意对任意 $s \in R$, 有

$$y(s) \le \frac{y(t) - qy(t-1)}{1-q}, \tag{4.8}$$

所以得 $y(s) \le \frac{M_2 + qM_1}{1-q}$, 对所有 $s \in R$ 成立.

情形 2 $y(t) \le 0$, 由 $y(t) \ge y(t-1)$, 知

$$y(t-1) \le y(t) \le 0.$$

如果 $y(t) - qy(t-1) \le 0$, 由 (4.8) 知结论成立．若 $y(t) - qy(t-1) > 0$, 则 $y(t) > qy(t-1)$, 于是由 (4.6), 有

$$qg(y(t-1)) - qby(t-1) \ge aqy(t-1) + g(qy(t-1)).$$

即

$$\frac{g(qy(t-1)) - qg(y(t-1))}{qy(t-1)} \ge -(a+b).$$

于是由条件 (iv), 存在 $M_3 > 0$ 使 $y(t-1) \ge -M_3$. 重复情形 1 的后半部分，可找到 $M > 0$ 使 $y(s) \le M$ 对所有 $s \in R$ 成立．证毕.

定理 4.5 假设 $q \in (0,1)$, $0 < a < b$, $qb - a > 0$, (P_1),

$$\frac{\pi(1-q^2)}{q^2b^2 - a^2}\arccos\frac{q^2b - a}{q(b-a)} < 1 \tag{4.9}$$

及引理 4.4 的 (i)–(iv) 成立，则对每个 $r > r_0$, 方程 (4.2) 至少有一个非常数周期解，其中 r_0 由 (3.10) 定义.

证明 由引理 4.4 的假设 (i), 容易看出对任意 $r > 0$, $(r, 0)$ 是方程 (4.2) 的唯一的驻点，且每个 $(r_j, 0)$ $(j = 0, 1, \ldots)$ 是 (4.2) 的孤立中心，其中 r_j 由 (4.10) 定义. 由引理 4.1 的 (i) 对 $r > 0$, (4.2) 除孤立中心 $(r_j, 0)$ $(j = 0, 1, \ldots)$ 外无其它中心，进而，由引理 4.1 的 (ii), $(r_j, 0, \frac{\pi}{\omega_j})$ 的横截数 $\gamma(r_j, 0, \frac{2\pi}{\omega_j}) = -1$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. 于是由 [3] 的定理 5.14 知对每个固定的 j, $\mathcal{C}(r_j, 0, \frac{2\pi}{\omega_j})$ 是连通无界的，其中 $\mathcal{C}(r_j, 0, \frac{2\pi}{\omega_j})$ 是方程 (4.2) 的所有的位于空间 $V \times R \times R_+$ 中的非平凡周期解集合的闭包 S 中的连通分支. V 是所有周期函数全体, $r \in R, R_+$ 是周期所在的空间.

下面我们仅考虑 $\mathcal{C}(r_0, 0, \frac{2\pi}{\omega_0})$, 注意到

$$\omega_0 = \frac{\beta_0}{r_0} = \frac{\beta_0}{\frac{1}{\beta_0}\arccos\frac{q^2b-a}{q(b-a)}} \quad \text{及} \quad \beta_0 = \sqrt{\frac{q^2b^2-a^2}{1-q^2}},$$

有

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi(1-q^2)\arccos\frac{q^2b-a}{q(b-a)}}{q^2b^2-a^2},$$

所以由 (4.9), 得

$$\frac{2\pi}{\omega_0} < 2.$$

结合引理 4.2 知存在整数 $m \geq 1$, 使 (4.2) 的位于 $\mathcal{C}(r_0, 0, \frac{2\pi}{\omega_0})$ 上的周期解的周期 T 满足 $\frac{2}{m+1} < T < \frac{2}{m}$. 于是再结合引理 4.4 知连通分支 $\mathcal{C}(r_0, 0, \frac{2\pi}{\omega_0})$ 在 r 轴上的投影无界. 而由引理 4.3 知它在 r 轴上投影向右无穷，即包含 $[r_0, \infty)$. 证毕.

参 考 文 献

[1] Brayton R., Nolinear oscillations in a distributed network, *Quart. Appl. Math.*, 1967, **XXIV**(4): 289–301.
[2] Brayton R., Bifurcation of periodic solutions in a nonlinear difference-differential equations of neutral type, *Quart. Appl. Math.*, 1966, **XXIV**(3): 215–224.
[3] Krawcewicz W., Wu J., Xia H., Global Hopf bifurcation theory for condensing fields and neutral equations with applications to lossless transmission problems, *Canadian Appl. Math. Quart.*, 1993, **1**(2): 167–219.
[4] Wu J., Xia H., Self-sustained oscillations in a ring array of coupled lossless transmission lines, *J. Diff. Eqns.*, 1996, **124**(1): 247–278.
[5] Ferreira J., On the stability of a distributed network, *SIAM. J. Math. Anal.*, 1986, **17**(1): 38–45.
[6] Hale J., Lunel S. V., Introduction to Functional Differential Equations, New York: Springer-Verlag, 1993.
[7] Lopes O., Stability and forced oscillations, *J. Math. Anal. Apppl.*, 1976, **55**: 686–698.
[8] Brumley W. E., On the asymptotic behavior of solutions of differential-difference equations of neutral type, *J. Diff. Equns.*, 1970, **7**: 175–188.
[9] Dieudonne J., Foundations of Modern Analysis, New York, London: Academic Press, 1960.
[10] Zheng Z., Theory of Functional Differential Equations, Hefei: Anhui Education Press, 1994 (in Chinese).