中国科学 A 辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 6 期: 679～688
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

离散时间积分递推序列的单稳波的稳定性

林国 ①, 李万同 ①, 阮士贵 ②*

① 兰州大学数学与统计学院, 兰州 730000
② Department of Mathematics, The University of Miami, Coral Gables, Florida 33124, USA
E-mail: ling@lzu.edu.cn, wtli@lzu.edu.cn, ruan@math.miami.edu

收稿日期: 2008-07-28; 接受日期: 2009-02-06; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10871085) 和美国国家自然科学基金 (批准号: DMS-0412047, DMS-0715772) 资助项目

摘要 本文研究了定义在 $\mathbb{R}^2$ 上一个离散时间积分递推序列的单稳波. 首先给出了此类单稳波的存在性并估计了其精确的渐近行为. 借助于比较原理和上下解方法, 证明了此类波在位移和旋转意义下的稳定性. 对于空间区域为 $\mathbb{R}$ 的情形也给出了类似的结论.

关键词 积分递推序列 比较原理 上下解 单稳波 稳定性

MSC(2000) 主题分类 35B40, 45M05, 92D25

1 引言

1982 年, 数学家 Weinberger 在文献 [1] 中运用如下的离散时间积分递推序列来描述一类生物的演化过程,

$$u_{n+1}(x) = Q[u_n](x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

其中向量函数 $u_n(x) \in \mathbb{R}^k$ 表示 k 个物种在时刻 n 位于点 $x \in \mathcal{H} \subseteq \mathbb{R}^m$ 的密度, $\mathcal{H}$ 表示物种的栖息地, Q 是取值于 $\mathbb{R}^k$ 中的一个映射. 特别地, 文献 [1, p. 358] 中还提出了一个具体的优良基因演化模型:

$$u_{n+1}(\mathbf{x}) = Q[u_n](\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} m(\mathbf{x}-\mathbf{y}) g(u_n(\mathbf{y})) d\mathbf{y}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.2}$$

其中 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, $u_n \in \mathbb{R}$ 表示第 n 代个体中该基因的比例, m 表示个体随机移动的概率函数, $g(u_n)$ 表示未发生空间迁徙之前的基因比例. 若假设 $m(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ 为 Gauss 核函数 (参见注记 5.6), 也就是定义在 $\mathbb{R}^2$ 空间区域的齐次反应扩散方程的基本解 (实际上, 在文献 [2, 3] 中用来描述基因传播的模型就是反应扩散方程), 则 (1.2) 式就具有如下形式

$$u_{n+1}(\mathbf{x}) = Q[u_n](\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi d} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4d}} g(u_n(\mathbf{y})) d\mathbf{y}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.3}$$

其中 $d > 0$ 为一个正常数, $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的欧氏范数.

在过去的三十年里, 模型 (1.2) 及更一般的递推序列的动力学行为被许多学者研究过, 特别是在用行波解和渐近传播速度描述其时空模式方面, 例如文献 [1, 4–20].

引用格式: 林国, 李万同, 阮士贵. 离散时间积分递推序列的单稳波的稳定性. 中国科学 A, 2009, 39(6): 679–688
Lin G, Li W T, Ruan S G. Asymptotic stability of monostable wavefronts in discrete-time integral recursions. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0123-6

众所周知, 稳定的波前解 (一类单调行波解) 对于描述生物演化、物理相变过程以及化学反应等具有非常重要的意义 [21−23], 对于理解相应 Cauchy 型问题的长时间行为也非常有效 [24]. 然而, 上述提到的文献仅仅考虑了波前解的存在性以及渐近传播速度, 对于这种具有离散时间的递推序列波前解的稳定性还没有答案. 本文就这类模型波前解的稳定性予以研究.

受文献 [23–25] 以及 [26–28] 关于反应扩散方程波前解稳定性以及格动力系统波前解稳定性研究的启发, 模型 (1.3) 的波前解在不稳定平衡态附近所具有的精确渐近行为对于后续研究是非常关键的, 因此本文首先研究模型 (1.3) 波前解的存在性以及在不稳定平衡态附近的精确渐近行为. 为此, 首先根据行波系统在不稳定平衡点附近的线性化方程定义一些常数, 然后运用这些常数构造一对上下解. 运用单调迭代 [4, 17] 技巧, 建立模型 (1.3) 波前解的存在性并且估计其渐近行为.

由于波前解稳定性所研究的是相应 Cauchy 问题以波前解的一个空间扰动作为初值时候的长时间行为, 因而需要对模型 (1.3) 所对应的 Cauchy 问题进行研究. 特别地, 借助于波前解构造模型 (1.3) 的一对上下解, 然后运用基于比较原理和上下解方法的挤压技术 [25, 27, 28] 证明波前解在旋转意义下以及位移意义下的稳定性.

本文结构安排如下: 第二部分建立模型 (1.3) 波前解的存在性并给出波前解在不稳定平衡点附近的精确渐近行为. 第三部分研究相应的初值问题, 接下来运用挤压技术证明波前解的稳定性. 最后考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的积分递推序列的波前解.

2 波前解的存在性

本节运用上下解方法和单调迭代技巧建立模型 (1.3) 波前解的存在性. 在本文中, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$ 也被记做 (x_1,x_2), 而 $d\mathbf{x}$ 表示 dx_1dx_2, 对 $\mathbf{y}=(y_1,y_2)$ 也采用类似的记号. 对于自然数 $n=1,2$, 记 $C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})=\{u(x)|u(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 有界且一致连续$\}$. 则 $C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ 在极大范数 $|\cdot|$ 的意义下是一个 Banach 空间. 若 $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $a<b$, 则 $C_{[a,b]}$ 表示 $C_{[a,b]}=\{u(x)|u(x)\in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}),\ a\leqslant u(x)\leqslant b, x\in\mathbb{R}^n\}$. 此外, 对于映射 g, 本文始终假设如下条件成立:

(g1) 若 $u\in(0,1)$, 则 $g(0)=0$, $g(1)=1$, $g(u)>u$;

(g2) 若 $u\in[0,1]$, 则 $g(u)$ 是一个 C^2 函数并且 $0\leqslant g'(u)\leqslant g'(0)$;

(g3) 存在某个常数 $\rho\in(0,1)$ 使得对于 $u\in[1-\rho,1]$ 有 $0\leqslant g'(u)<1$;

(g4) 对于任意的 $u,\delta\in[0,1]$ 并且 $(1+\delta)u\in[0,1]$, $g((1+\delta)u)\leqslant(1+\delta)g(u)$.

实际上, 有许多著名的模型满足上述假设 (g1)–(g4), 例如著名的 Beverton-Holt 群体补充曲线 (参考文献 [6]), 其具有形式 $g(u)=\frac{\lambda u}{1+(\lambda-1)u},\lambda>1$.

定义 2.1 模型 (1.3) 的行波解是形如 $u_n(\mathbf{x})=\phi(x_1\cos\theta+x_2\sin\theta+cn)$ 的特解, 这里 $c>0$, $\theta\in[0,2\pi]$ 且 $(-c\cos\theta,-c\sin\theta)$ 表示波形函数 $\phi\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 在空间 $\mathbb{R}^2$ 上的传播速度. 特别地, 若 $\phi(\xi)$ 关于 $\xi\in\mathbb{R}$ 单调, 则称其为波前解.

根据定义 2.1, 模型 (1.3) 的波前解 $\phi(\xi)$ 必满足如下积分方程

$$\phi(\xi+c)=\frac{1}{4\pi d}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4d}}g(\phi(\xi-x_1\cos\theta-x_2\sin\theta))d\mathbf{x},\quad \xi\in\mathbb{R}. \tag{2.1}$$

根据波前解所具有的具体意义 [1], 通常感兴趣的是满足如下渐近边界条件的波前解

$$\lim_{\xi\to-\infty}\phi(\xi)=0,\qquad \lim_{\xi\to\infty}\phi(\xi)=1. \tag{2.2}$$

注 2.2 根据假设 (g1)–(g2), 也称 (2.1)–(2.2) 的单调解为 (1.3) 的单稳波 (抛物方程相关定义参见文献 [23]).

因此, 本节的目的就是研究方程 (2.1)–(2.2) 单调解的存在性. 为此, 改写方程 (2.1) 如下

$$\phi(\xi)=\frac{1}{4\pi d}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4d}}g(\phi(\xi-c-x_1\cos\theta-x_2\sin\theta))d\mathbf{x},\quad \xi\in\mathbb{R}. \tag{2.3}$$

为了应用单调迭代技巧研究方程 (2.3) 和 (2.2) 单调解的存在性, 需要引入如下定义.

定义 2.3 称连续函数 $\phi(\xi)\in C_{[0,1]}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 为 (2.3) 的上解 (下解), 如果其满足

$$\phi(\xi)\geqslant(\leqslant)\ \frac{1}{4\pi d}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4d}}g(\phi(\xi-c-x_1\cos\theta-x_2\sin\theta))d\mathbf{x},\quad \xi\in\mathbb{R}.$$

对于 $\lambda\geqslant 0, c>0$, 定义

$$\Lambda(\lambda,c)=\frac{g'(0)}{4\pi d}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4d}}e^{-\lambda(x_1\cos\theta+x_2\sin\theta+c)}d\mathbf{x}.$$

引理 2.4 假设 $c>c^*:=2\sqrt{d\ln(g'(0))}$. 则对于任意给定的 $c>c^*$, $\Lambda(\lambda,c)=1$ 有两个正根 $\lambda_1(c)<\lambda_2(c)$ 定义 $\lambda_{1,2}(c)=\frac{c\pm\sqrt{c^2-(c^*)^2}}{2d}$, 而在 $c<c^*$ 的时候 $\Lambda(\lambda,c)=1$ 没有正实根. 此外, 对于 $c>c^*$ 的情形, 存在 $\eta\in(1,\min\{2,\frac{\lambda_2(c)}{\lambda_1(c)}\})$ 使得 $\Lambda(\eta\lambda_1(c),c)<1$.

引理 2.4 的结论可通过直接计算得到, 证明略. 假设 $q>1$ 为正常数, 运用引理 2.4 所定义的常数, 构造连续函数如下

$$\overline{\phi}(\xi)=\min\{e^{\lambda_1(c)\xi}+qe^{\eta\lambda_1(c)\xi},1\},\qquad \underline{\phi}(\xi)=\max\{e^{\lambda_1(c)\xi}-qe^{\eta\lambda_1(c)\xi},0\}. \tag{2.4}$$

引理 2.5 $\overline{\phi}(\xi)$ 为方程 (2.3) 的上解.

证明 为证引理的结论, 仅需验证上解的定义. 若 $\overline{\phi}(\xi)=1$, 则 $\overline{\phi}(y)\leqslant 1$ 对于所有 $y\in\mathbb{R}$ 均成立, 因此 $g(\overline{\phi}(\xi-c-x_1\cos\theta-x_2\sin\theta))\leqslant 1, x_1,x_2\in\mathbb{R}$ 可由假设 (g1)–(g2) 得到. 因此结论对于 $\overline{\phi}(\xi)=1$ 成立.

若 $\overline{\phi}(\xi)=e^{\lambda_1(c)\xi}+qe^{\eta\lambda_1(c)\xi}$, 则 $g(\overline{\phi}(y))\leqslant g'(0)[e^{\lambda_1(c)y}+qe^{\eta\lambda_1(c)y}]$ 对于所有 $y\in\mathbb{R}$ 成立. 因此只需要验证

$$\begin{aligned}e^{\lambda_1(c)\xi}+qe^{\eta\lambda_1(c)\xi}&\geqslant\frac{g'(0)}{4\pi d}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4d}}[e^{\lambda_1(c)(\xi-c-x_1\cos\theta-x_2\sin\theta)}+qe^{\eta\lambda_1(c)(\xi-c-x_1\cos\theta-x_2\sin\theta)}]d\mathbf{x}\\&=e^{\lambda_1(c)\xi}\Lambda(\lambda_1(c),c)+qe^{\eta\lambda_1(c)\xi}\Lambda(\eta\lambda_1(c),c).\end{aligned}$$

根据条件 (g2) 和引理 2.4, 上述不等式显然成立. 引理证毕.

引理 2.6 若 $q>1$ 充分大, 则 $\underline{\phi}(\xi)$ 为方程 (2.3) 的下解.

证明 根据定义, 仅需验证下解所满足的不等式. 若 $\underline{\phi}(\xi)=0$, 则 $g(\underline{\phi}(y))\geqslant 0, y\in\mathbb{R}$ 表明结论成立.

根据条件 (g2), 存在常数 $L>0$ 使得 $|g''(u)|<g'(0)L, u\in[0,1]$. 当 $\underline{\phi}(\xi)=e^{\lambda_1(c)\xi}-qe^{\eta\lambda_1(c)\xi}$ 时, 仅需验证

$$\begin{aligned}\underline{\phi}(\xi)\leqslant&\frac{g'(0)}{4\pi d}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4d}}\underline{\phi}(\xi-c-x_1\cos\theta-x_2\sin\theta)d\mathbf{x}\\&-\frac{g'(0)L}{4\pi d}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4d}}[\underline{\phi}(\xi-c-x_1\cos\theta-x_2\sin\theta)]^2d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

由于 $\underline{\phi}(\xi) < e^{\lambda_1(c)\xi}$, 因而只需考虑

$$\begin{aligned}\underline{\phi}(\xi) \leqslant & \frac{g'(0)}{4\pi d}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4d}} e^{\lambda_1(c)(\xi-c-x_1\cos\theta-x_2\sin\theta)}d\mathbf{x}\\ & -\frac{qg'(0)}{4\pi d}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4d}} e^{\eta\lambda_1(c)(\xi-c-x_1\cos\theta-x_2\sin\theta)}d\mathbf{x}\\ & -\frac{Lg'(0)}{4\pi d}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4d}} e^{2\lambda_1(c)(\xi-c-x_1\cos\theta-x_2\sin\theta)}d\mathbf{x}\\ = & e^{\lambda_1(c)\xi}\Lambda\left(\lambda_1(c),c\right) - qe^{\eta\lambda_1(c)\xi}\Lambda\left(\eta\lambda_1(c),c\right) - Le^{2\lambda_1(c)\xi}\Lambda\left(2\lambda_1(c),c\right).\end{aligned}$$

根据引理 2.4 以及 $\underline{\phi}(\xi)$ 的定义, 这等价于证明

$$q(\Lambda(\eta\lambda_1(c),c)-1)e^{\eta\lambda_1(c)\xi} \leqslant -L\Lambda(2\lambda_1(c),c)e^{2\lambda_1(c)\xi}.$$

令 $q > \frac{L\Lambda(2\lambda_1(c),c)}{1-\Lambda(\eta\lambda_1(c),c)}+1$, 则结论成立. 引理证毕.

运用文献 [4, 定理 6.1] 以及 [17, 定理 3.3] 中的单调迭代技巧, 可得如下结论.

定理 2.7 若 $c > c^*$ 成立. 则方程 (2.1) 和 (2.2) 存在一个单调解 $\phi(\xi)$ 满足

$$\lim_{\xi\to-\infty}\phi(\xi)e^{-\lambda_1(c)\xi} = 1.$$

注 2.8 与定理 2.7 类似的一个结果已经在文献 [17] 中给出. 但是文献 [17] 中构造的上解不能满足本文引理 4.2 的要求, 因而这里构造了不同于文献 [17] 的上解.

下述结论可由热传导方程解的光滑性 [29] 以及 L'Hospital 法则得到.

定理 2.9 假设 $\phi(\xi)$ 由定理 2.7 给出. 则 $\phi(\xi) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 并且

$$\lim_{\xi\to-\infty}\phi'(\xi)e^{-\lambda_1(c)\xi} = \lambda_1(c).$$

3 初值问题

本节先给出 Weinberger[1] 关于 (1.3) 对应的 Cauchy 问题的相关结论, 然后构造其适当的上下解. 也就是研究

$$\begin{cases} u_{n+1}(\mathbf{x}) = Q[u_n](\mathbf{x}), \quad n = 0,1,2,\dots,\\ u_0(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}),\end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $u(\mathbf{x}) \in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ 为一个给定的函数.

定理 3.1 假设 $u(\mathbf{x}) \in C_{[0,1]}$. 则 $u_n(\mathbf{x}) \in C_{[0,1]}$ 对所有的 $n = 0,1,2,\dots,$ 成立.

根据 (g1)–(g2), 定理 3.1 的结论显然, 证明略. 为进一步应用比较原理, 给出 (3.1) 的上下解定义如下:

定义 3.2 假设 $v_n(\mathbf{x}) \in C_{[0,1]}$ 对 $n = 0,1,2,\dots$ 成立. 若

$$v_{n+1}(\mathbf{x}) \geqslant (\leqslant)\ Q[v_n](\mathbf{x}), \quad n = 0,1,2,\dots, \quad v_0(\mathbf{x}) \geqslant (\leqslant)\ u(\mathbf{x}), \tag{3.2}$$

则称 $v_n(\mathbf{x})$ 为方程 (3.1) 的上解 (下解).

定理 3.3 假设 $\overline{u}_n(\mathbf{x})$ 和 $\underline{u}_n(\mathbf{x})$ 分别为方程 (3.1) 的上解和下解.

(i) 若 $\overline{u}_0(\mathbf{x}) \geqslant \underline{u}_0(\mathbf{x})$, 则 $\overline{u}_n(\mathbf{x}) \geqslant \underline{u}_n(\mathbf{x})$ 对所有 $n \geqslant 1$ 成立.

(ii) 若 $\overline{u}_0(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{x}) \geqslant \underline{u}_0(\mathbf{x})$, 则有 $\overline{u}_n(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{x}) \geqslant \underline{u}_n(\mathbf{x}), n \geqslant 1$.

(iii) 若 $\overline{u}_0(\mathbf{x}) \geqslant \underline{u}_0(\mathbf{x})$, 则

$$\overline{u}_1(\mathbf{x}) - \underline{u}_1(\mathbf{x}) \geqslant \frac{1}{4\pi d}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4d}}[g(\overline{u}_0(\mathbf{y})) - g(\underline{u}_0(\mathbf{y}))]d\mathbf{y} \geqslant 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

定理 3.3 的结论是显然成立的, 也可参考文献 [1].

注 3.4 上述第 (iii) 条表明方程 (1.3) 的波前解严格单调并且 $\phi'(\xi)>0,\xi\in\mathbb{R}$.

引理 3.5 假设 $\phi(x_1\cos\theta+x_2\sin\theta+cn)$ 是方程 (1.3) 由定理 2.7 给出的波前解. 则对于任意的 $\theta_1\in[0,2\pi]$, 存在常数 $\delta_0\in(0,1)$, $\beta>0$ 和 $\sigma>0$ 使得对于任意的 $\delta\in(0,\delta_0]$ 和 $\xi^+\in\mathbb{R}$, 连续函数

$$\overline{u}_n(\mathbf{x})=\min\{(1+\delta e^{-\beta n})\phi(x_1\cos\theta_1+x_2\sin\theta_1+cn+\xi^+-\sigma\delta e^{-\beta n}),1\}\tag{3.3}$$

在满足 $\overline{u}_0(\mathbf{x})\geqslant u(\mathbf{x}),\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$ 时为方程 (3.1) 的一个上解.

证明 不失一般性, 仅需考虑 $\xi^+=0$. 若 $\overline{u}_n(\mathbf{x})=1$, 则结论显然. 因此只需考虑 $\overline{u}_n(\mathbf{x})\neq1$ 的情形. 记 $\xi=x_1\cos\theta_1+x_2\sin\theta_1+cn,\tau=y_1\cos\theta_1+y_2\sin\theta_1$, 则需证明如下不等式

$$\begin{aligned}&(1+\delta e^{-\beta(n+1)})\phi(\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta(n+1)})\\&\quad\geqslant\frac{1}{4\pi d}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{4d}}g((1+\delta e^{-\beta n})\phi(\xi-\delta\sigma e^{-\beta n}-\tau))d\mathbf{y}\end{aligned}\tag{3.4}$$

对于 $\xi\in\mathbb{R}$ 和 $n\geqslant0$ 成立. 取 $M>0$ 为一充分大的有界常数, 以下分三种情况考虑.

根据波前解的定义, (3.4) 等价于

$$\begin{aligned}\delta e^{-\beta(n+1)}\phi(\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta(n+1)})\geqslant&\frac{1}{4\pi d}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{4d}}g((1+\delta e^{-\beta n})\phi(\xi-\delta\sigma e^{-\beta n}-\tau))d\mathbf{y}\\&-\frac{1}{4\pi d}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{4d}}g(\phi(\xi-\delta\sigma e^{-\beta(n+1)}-\tau))d\mathbf{y}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

由于 (g4) 成立, 因此为证 (3.5) 成立仅需验证

$$\begin{aligned}\delta e^{-\beta(n+1)}\phi(\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta(n+1)})\geqslant&\frac{1+\delta e^{-\beta n}}{4\pi d}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{4d}}g(\phi(\xi-\delta\sigma e^{-\beta n}-\tau))d\mathbf{y}\\&-\frac{1}{4\pi d}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{4d}}g(\phi(\xi-\delta\sigma e^{-\beta(n+1)}-\tau))d\mathbf{y}\\=&\,\delta e^{-\beta n}\phi(\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta n})+\phi(\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta n})\\&-\phi(\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta(n+1)}).\end{aligned}$$

根据波前解的单调性有 $\phi(\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta(n+1)})>\phi(\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta n})$, 故需证明

$$\phi(\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta(n+1)})-\phi(\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta n})>\delta e^{-\beta n}[1-e^{-\beta}]\phi(\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta n}).$$

根据中值定理, 仅需考虑

$$\phi(\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta n})\leqslant\sigma\phi'(\mu)\tag{3.6}$$

对于 $\mu\in[\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta n},\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta(n+1)}]$ 是否成立.

若 $\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta n}<-M$, 根据定理 2.7 和 2.9 中给定的波前解渐近行为, 取 $\sigma>0$ 充分大即可使得 (3.6) 成立.

若 $|\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta n}|\leqslant M$, 根据波前解的严格单调性 (参见注 3.4), 选择 $\sigma>0$ 充分大即可使得 (3.6) 成立.

现在考虑 $\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta n}>M$ 的情形. 选择常数 $\kappa\in(0,1)$ 使得

$$g'(x)<\kappa<1,\quad x>\phi(M-\delta\sigma)>\kappa,$$

根据条件 (g3) 以及 $M>0$ 充分大, 上述选择是可以实现的. 因此 $\phi(\xi)$ 的单调性表明

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi d}\int_{\tau\leqslant 0}e^{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{4d}}g((1+\delta e^{-\beta n})\phi(\xi-\delta\sigma e^{-\beta n}-\tau))d\mathbf{y}\\&\quad\leqslant\frac{1+\delta e^{-\beta n}}{4\pi d}\int_{\tau\leqslant 0}e^{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{4d}}g(\phi(\xi-\delta\sigma e^{-\beta n}-\tau))d\mathbf{y}+\frac{\kappa\delta e^{-\beta n}}{2}-\frac{\delta e^{-\beta n}\phi(\xi-\delta\sigma e^{-\beta n})}{2},\end{aligned}$$

进一步可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi d}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{4d}}g((1+\delta e^{-\beta n})\phi(\xi-\delta\sigma e^{-\beta n}-\tau))d\mathbf{y}\\&\quad\leqslant\frac{1+\delta e^{-\beta n}}{4\pi d}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{4d}}g(\phi(\xi-\delta\sigma e^{-\beta n}-\tau))d\mathbf{y}+\frac{\kappa\delta e^{-\beta n}}{2}-\frac{\delta e^{-\beta n}\phi(\xi-\delta\sigma e^{-\beta n})}{2}\\&\quad=(1+\delta e^{-\beta n})\phi(\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta n})+\frac{\kappa\delta e^{-\beta n}}{2}-\frac{\delta e^{-\beta n}\phi(\xi-\delta\sigma e^{-\beta n})}{2}.\end{aligned}$$

因此, $\xi>M$ 时 (3.4) 成立只需下面的估计成立

$$\begin{aligned}&(1+\delta e^{-\beta(n+1)})\phi(\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta(n+1)})-(1+\delta e^{-\beta n})\phi(\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta n})\\&\quad\geqslant(1+\delta e^{-\beta(n+1)})\phi(\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta n})-(1+\delta e^{-\beta n})\phi(\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta n})\\&\quad=\delta e^{-\beta n}(e^{-\beta}-1)\phi(\xi+c-\delta\sigma e^{-\beta n})\geqslant\frac{\kappa\delta e^{-\beta n}}{2}-\frac{\delta e^{-\beta n}\phi(\xi-\delta\sigma e^{-\beta n})}{2},\end{aligned}$$

取 $\beta>0$ 充分小即可使上式成立. 引理证毕.

引理 3.6 设 $\phi(x_1\cos\theta+x_2\sin\theta+cn)$ 为定理 2.7 给出的方程 (1.3) 的波前解. 则对于任意的 $\theta_1\in[0,2\pi]$, 存在常数 $\delta_0\in(0,1),\beta>0,\sigma>0$ 使得对于每一个 $\delta\in(0,\delta_0]$, $\xi^-\in\mathbb{R}$, 如下定义的连续函数 $\underline{u}_n(\mathbf{x})$ 在满足 $\underline{u}_0(\mathbf{x})\leqslant u(\mathbf{x})$ 的时候是方程 (3.1) 的一个下解

$$\underline{u}_n(\mathbf{x})=(1-\delta e^{-\beta n})\phi(x\cos\theta_1+y\sin\theta_1+cn+\xi^-+\delta\sigma e^{-\beta n}).\tag{3.7}$$

引理 3.6 的证明类似于引理 3.5 的证明, 故略.

注 3.7 在引理 3.5–3.6 中, σ 和 β 的选择关于 $\delta\in(0,\delta_0]$ 是一致的, 这对于后面的讨论非常重要.

引理 3.8 假设 $u_n(\mathbf{x}),v_n(\mathbf{x})$ 分别为方程 (3.1) 取不同初值 $u(\mathbf{x}),v(\mathbf{x})$ 的解. 若 $u(\mathbf{x})\geqslant v(\mathbf{x})$ 并且 $u(\mathbf{x}),v(\mathbf{x})\in C_{[0,1]}$, 则 $0\leqslant u_1(\mathbf{x})-v_1(\mathbf{x})\leqslant g'(0)|u(\cdot)-v(\cdot)|,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$.

引理 3.8 可直接由 (g2) 得到, 此处略去证明.

4 波前解的渐近稳定性

在这一节, 研究定理 2.7 所确定的波前解在位移意义以及旋转意义下的稳定性. 本节主要结论如下.

定理 4.1 令 $\phi(x_1\cos\theta+x_2\sin\theta+cn)$ 是由定理 2.7 所确定的方程 (1.3) 的波前解. 假设存在 $\theta_1\in[0,2\pi]$ 使得如下极限关于 $\xi=x_1\cos\theta_1+x_2\sin\theta_1$ 一致:

$$\lim_{\xi\to-\infty}u(\mathbf{x})e^{-\lambda_1(c)\xi}=\rho,\quad\liminf_{\xi\to\infty}u(\mathbf{x})>0.$$

令 $\xi_0=\frac{1}{\lambda_1(c)}\ln\rho$ 并且 $u_n(\mathbf{x})$ 为 (3.1) 取初值 $u_0(\mathbf{x})=u(\mathbf{x})$ 时的解. 则

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{u_n(\mathbf{x})}{\phi(x_1\cos\theta_1+x_2\sin\theta_1+cn+\xi_0)}-1\right|=0.$$

为了证明定理 4.1, 首先给出一些基本估计, 在此过程始终假设定理 4.1 的条件成立.

引理 4.2 对于任意的 $p>0$ 以及 $\mathbf{p}=(p\cos\theta_1, p\sin\theta_1)$, 存在常数 $\xi(p)$ 使得

$$u_n(\mathbf{x}-2\mathbf{p})<\phi(\xi+\xi_0)<u_n(\mathbf{x}+2\mathbf{p})$$

对所有的 $x_1\cos\theta_1+x_2\sin\theta_2+cn=\xi\leqslant\xi(p)$ 以及 $n=0,1,2,\ldots$ 成立.

证明 在 $\overline{\phi}$ 和 $\underline{\phi}$ 的定义 2.4 中, 令 $q>1$ 充分大, 则

$$\overline{\phi}(x_1\cos\theta_1+x_2\sin\theta_1+\xi_0)\geqslant u(\mathbf{x}-\mathbf{p}),\quad \underline{\phi}(x_1\cos\theta_1+x_2\sin\theta_1+\xi_0)\leqslant u(\mathbf{x}+\mathbf{p})$$

对于所有 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$ 成立. 根据引理 2.5 和 2.6, $\overline{\phi}(\xi+\xi_0)$ 与 $\underline{\phi}(\xi+\xi_0)$ 分别为 (3.1) 的上下解. 根据定理 2.7 中给出的波前解及其渐近行为可得引理结论. 引理证毕.

引理 4.3 存在常数 $\delta\in(0,1),\beta>0,\sigma>0$ 以及 $z_0>0$ 使得

$$(1-\delta e^{-\beta n})\phi(\xi+\xi_0-z_0+\delta\sigma e^{-\beta n})\leqslant u_n(\mathbf{x})\leqslant\min\{(1+\delta e^{-\beta n})\phi(\xi+\xi_0+z_0-\delta\sigma e^{-\beta n}),1\}$$

对所有的 $\xi=x_1\cos\theta_1+x_2\sin\theta_2+cn\in\mathbb{R}$ 和 $n\geqslant1$ 成立.

证明 在引理 4.2 中选择 $p=1$. 则引理结论在 $z_0-\sigma>2$ 时对于 $x_1\cos\theta_1+x_2\sin\theta_2+c<\xi(1)$ 成立. 若 $x_1\cos\theta_1+x_2\sin\theta_2+c>\xi(1)$, 则存在常数 $\delta'>0$ 使得 $u_1(\mathbf{x})>\delta'$ 一致成立. 因而对于 $z_0>0$ 充分大, 存在常数 $\delta\in(0,1),\beta>0,\sigma>0$ 使得

$$(1-\delta e^{-\beta})\phi(\xi+\xi_0-z_0+\delta\sigma e^{-\beta})\leqslant u_1(\mathbf{x})\leqslant\min\{(1+\delta e^{-\beta})\phi(\xi+\xi_0+z_0-\delta\sigma e^{-\beta}),1\}$$

对 $\xi=x_1\cos\theta_1+x_2\sin\theta_2+c$ 成立. 特别地, 当 $z_0>0$ 充分大的时候, 可以选择 $\delta\in(0,1),\beta>0$, $\sigma>0$ 同时满足引理 3.5 和 3.6 的条件. 根据定理 3.3, 引理结论得证.

引理 4.4 存在常数 $M_0>0$ 使得 $(1-\varepsilon)\phi(\xi+3\varepsilon\sigma)\leqslant\phi(\xi)\leqslant(1+\varepsilon)\phi(\xi-3\varepsilon\sigma)$ 对所有的 $\varepsilon\in(0,\delta)$ 和 $\xi\geqslant M_0+\xi_0$ 成立, 其中 δ 由引理 4.3 定义.

证明 由于 $\lim_{\xi\to\infty}\phi(\xi)=1$, 上述结论在 $M_0>0$ 充分大的时候显然成立.

引理 4.5 令 z 和 M 为任意给定的正常数, $u_n^+(\mathbf{x}),u_n^-(\mathbf{x})$ 分别由 (3.1) 选择如下初值时定义

$$u^+(\mathbf{x})=\phi(\varsigma+\xi_0+z)\chi(\varsigma+M)+\phi(\varsigma+\xi_0+2z)\left[1-\chi(\varsigma+M)\right],$$
$$u^-(\mathbf{x})=\phi(\varsigma+\xi_0-z)\chi(\varsigma+M)+\phi(\varsigma+\xi_0-2z)\left[1-\chi(\varsigma+M)\right],$$

其中 $\varsigma=x_1\cos\theta_1+x_2\sin\theta_1,\chi(y)=\min\{\max\{0,-y\},1\},y\in\mathbb{R}$. 则存在常数 $\epsilon\in(0,\min\{\delta/2, z/(3\delta)\})$ 使得

$$u_1^+(\mathbf{x})\leqslant(1+\epsilon)\phi(\varsigma+\xi_0+2z-3\epsilon\sigma),\quad u_1^-(\mathbf{x})\geqslant(1-\epsilon)\phi(x+\xi_0-2z-3\epsilon\sigma)$$

对所有的 $\varsigma\in[-M,\infty)$ 成立, 其中 $\varsigma=x_1\cos\theta_1+x_2\sin\theta_1+c$.

证明 根据 $\chi(y)$ 的定义, 容易看出

$$u^+(\mathbf{x})\leqslant\phi(\varsigma+\xi_0+2z),\quad \varsigma=x_1\cos\theta_1+x_2\sin\theta_1.$$

因此 $\phi(\xi+\xi_0+2z)$ 是 (3.1) 初值为 $u^+(\mathbf{x})$ 时的上解. 定理 3.3 以及 $\chi(y)$ 的定义还表明

$$u_n^+(\mathbf{x})<\phi(\xi+\xi_0+2z),\quad \xi=x_1\cos\theta_1+x_2\sin\theta_2+cn\in\mathbb{R},\quad n=1,2,\ldots.$$

选择 M_0 如引理 4.3 中所定义, 则结论对于 $\xi>M_0$ 时已证. 对于 $\xi\in[-M,M_0]$ 的情形, 注意到 $u_1^+(\mathbf{x})$ 仅仅依赖于 $\phi(\xi)$ 的定义, 所以 $u_1^+(\mathbf{x})$ 和 $\phi(\xi)$ 在有界区间一致连续性说明结论对于充分小的 $\epsilon>0$ 成立.

类似可证关于 $u_1^-(\mathbf{x})$ 的结论也成立. 引理证毕.

定理 4.1 的证明 定义常数 z^+ 和 z^- 如下

$$z^+ \triangleq \inf\{z|z \in A^+\}, \quad A^+ = \left\{z \geqslant 0 \middle| \lim_{n\to\infty} \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{u_n(\mathbf{x})}{\phi(\xi+\xi_0+2z)} \leqslant 1\right\},$$

$$z^- \triangleq \sup\{z|z \in A^-\}, \quad A^- = \left\{z \geqslant 0 \middle| \lim_{n\to\infty} \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{u_n(\mathbf{x})}{\phi(\xi+\xi_0-2z)} \geqslant 1\right\},$$

其中 $\xi = x_1\cos\theta + x_2\sin\theta + cn$. 根据引理 4.5, z^+ 和 z^- 是适定的. 因此要证定理结论, 仅需证明 $z^+ = z^- = 0$. 假定不然, 则存在 $N > 0$ 使得

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{u_n(\mathbf{x})}{\phi\left(\xi+\xi_0+2z^+\right)} \leqslant 1+\overline{\epsilon}, \qquad n > N, \quad \xi = x_1\cos\theta + x_2\sin\theta + cn,$$

其中常数满足 $g'(0)\overline{\epsilon} = \epsilon\phi(-M+\xi_0-3\epsilon\sigma)$, ϵ 由引理 4.5 取 $z = z^+ > 0$ 所定义. 特别地, 选择 $M > 0$ 为一充分大的常数并在引理 4.5 中选择

$$u^+(\mathbf{x}) = \phi(\xi+\xi_0+2z^+), \quad \xi = x_1\cos\theta_1 + x_2\sin\theta_1 + cN \in [-M,+\infty).$$

则

$$u_N(\mathbf{x}) \leqslant \phi(\xi+\xi_0+2z^+) + \overline{\epsilon} = u^+(\mathbf{x}) + \overline{\epsilon},$$

其中 $\xi = x_1\cos\theta_1 + x_2\sin\theta_1 + cN \in [-M,+\infty)$. 根据引理 3.8 进一步得到

$$u_{N+1}(\mathbf{x}) \leqslant u_1^+(\mathbf{x}) + \epsilon\phi(-M+\xi_0-3\epsilon\sigma) < (1+2\epsilon)\phi(\xi+\xi_0+2z^+-3\epsilon\sigma),$$

这里 $\xi = x_1\cos\theta_1 + x_2\sin\theta_1 + cN + c \in [-M,\infty)$. 因为 $M > 0$ 充分大, 则引理 4.2 表明下式对于 $\xi = x_1\cos\theta_1 + x_2\sin\theta_1 + cN + c \in (-\infty,-M]$ 成立, $u_{N+1}(\mathbf{x}) \leqslant \phi(\xi+\xi_0+z^+)$.

令 $\beta > 0$ 充分小并且记 $\xi = x_1\cos\theta_1 + x_2\sin\theta_1 + cN + c \in \mathbb{R}$, 则

$$u_{N+1}(\mathbf{x}) \leqslant \min\{(1+2\epsilon e^{-\beta})\phi(\xi+\xi_0+2z^+-\epsilon\sigma-2\epsilon\sigma e^{-\beta}), 1\}.$$

根据比较原理以及引理 3.5–3.6 (也参见注 3.7), 可知下式成立

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{u_n(\mathbf{x})}{\phi\left(\xi+\xi_0+2z^+-\epsilon\sigma\right)} \leqslant 1, \qquad \xi = x_1\cos\theta + x_2\sin\theta + cn,$$

这就表明 $z^+ - \frac{\epsilon\sigma}{2} \in A^+$, 这与 z^+ 的定义矛盾. 因此 $z^+ = 0$.

类似可证 $z^- = 0$. 定理证毕.

定理 4.6 假设 $\phi(x_1\cos\theta + x_2\sin\theta + cn)$ 和 $\phi_1(x_1\cos\theta_1 + x_2\sin\theta_1 + cn)$ 均为方程 (1.3) 的波前解并且

$$\lim_{\xi\to-\infty} \phi(\xi)e^{-\lambda_1(c)\xi} = 1, \quad \lim_{\xi\to-\infty} \phi_1(\xi)e^{-\lambda_1(c)\xi} = \rho,$$

则 $\phi(\xi) = \phi_1(\xi-\xi_0)$, 其中 $\xi_0 = \frac{1}{\lambda_1(c)}\ln\rho, \xi \in \mathbb{R}$.

定理 4.6 可直接由定理 4.1 得到, 证明略.

注 4.7 定理 4.1 和 4.6 给出了波前解在位移以及旋转意义下的稳定性以及唯一性, 这与文献 [30] 以及 [1, p. 358] 中所研究的离散介质情形是有区别的.

5 $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ 的情形

本节考虑空间为 $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ 的情形, 这也可以看做本文第 2–4 节研究对象的特例. 首先考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的如下模型 [7]:

$$v_{n+1}(x) = Q[v_n](x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi d}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4d}} g(v_n(y))dy, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{5.1}$$

这里 $d>0, x, y\in\mathbb{R}$, 映射 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 (g1)–(g4).

定义 5.1 方程 (5.1) 的波前解是形如 $v_n(x)=\psi(x+cn)$ 的特解, 这里 $c>0$ 为波速常数, 波形函数 $\psi(t)$ 关于 $t\in\mathbb{R}$ 单调不减.

根据上述定义, ψ 满足如下积分方程

$$\psi(t+c)=\frac{1}{\sqrt{4\pi d}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{x^2}{4d}}g(\psi(t-x))dx,\quad t\in\mathbb{R},\tag{5.2}$$

并要求 $\psi(t)$ 满足如下渐近边界条件

$$\lim_{t\to-\infty}\psi(t)=0,\quad \lim_{t\to\infty}\psi(t)=1.\tag{5.3}$$

类似于本文第二节, 可给出如下结论.

定理 5.2 假设 c^* 和 $\lambda_1(c)$ 由引理 2.4 定义并且 $c>c^*$ 成立. 则 (5.2)–(5.3) 有一个单调解 $\psi(t)$ 满足 $\lim_{t\to-\infty}\psi(t)e^{-\lambda_1(c)t}=1$ 和 $\lim_{t\to-\infty}\psi'(t)e^{-\lambda_1(c)t}=\lambda_1(c)$.

考虑初值问题

$$\begin{cases}v_{n+1}(x)=Q[v_n](x),\quad n=0,1,2,\dots,\\ v_0(x)=v(x),\end{cases}\tag{5.4}$$

这里 $v(x)\in C_{[0,1]}$, 算子 Q 由 (5.1) 所定义.

定理 5.3 令 $\psi(x+cn)$ 为定理 5.2 所定义的方程 (5.1) 的波前解, 函数 $v(x)$ 满足 $\lim_{x\to-\infty}v(x)e^{-\lambda_1(c)x}=\rho(\lim_{x\to\infty}v(x)e^{\lambda_1(c)x}=\rho)$ 以及

$$\liminf_{x\to\infty}v(x)>0\quad\Big(\liminf_{x\to-\infty}v(x)>0\Big).$$

令 $t_0=\frac{1}{\lambda_1(c)}\ln\rho$, $v_n(x)$ 由 (5.4) 取定初值 $v_0(x)=v(x)$ 所定义. 则

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{v_n(x)}{\psi(x+cn+t_0)}-1\right|=0\quad\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{v_n(x)}{\psi(-x+cn+t_0)}-1\right|=0\right).$$

定理 5.3 的证明类似于定理 4.1 的证明, 故略. 此外, 根据定理 5.3, 如下结论成立.

定理 5.4 令 $\psi(x+cn)$ 为定理 5.2 所定义的方程 (5.1) 的波前解, $\psi_1(x+cn)\in C_{[0,1]}$ 和 $\psi_2(-x+cn)\in C_{[0,1]}$ 也满足 (5.3)–(5.4). 如果

$$\lim_{t\to-\infty}\psi_1(t)e^{-\lambda_1(c)t}=\rho_1,\quad \lim_{t\to-\infty}\psi_2(t)e^{-\lambda_1(c)t}=\rho_2,$$

则 $\psi(t)=\psi_1(t-t_1)=\psi_2(t-t_2)$, 其中 $t_1=\frac{1}{\lambda_1(c)}\ln\rho_1, t_2=\frac{1}{\lambda_1(c)}\ln\rho_2$.

注 5.5 定理 5.3–5.4 表明, 即使在一维空间, 方程 (5.1) 的波前解在旋转意义 (一维空间具有两个方向) 和位移意义下也是稳定且唯一的.

本文最后给出如下两个注记.

注 5.6 本文的方法和结论容易推广到更一般的方程中去, 例如文献 [12] 中的模型.

注 5.7 类似于本文的方法, 可以研究高维空间反应扩散方程单稳波的稳定性和唯一性.

参考文献

1 Weinberger H F. Long-time behavior of a class of biological model. *SIAM J Math Anal*, **13**: 353–396 (1982)

2 Fisher R. The wave of advance of advantageous gene. *Ann Eugen*, **7**: 355–369 (1937)

3 Kolmogorov A N, Petrovskii I G, Piskunov N S. Study of a diffusion equation that is related to the growth of a quality of matter, and its application to a biological problem. *Byul Mosk Gos Univ Ser A Mat Mekh*, **1**: 1–26 (1937)

4 Diekmann O. Thresholds and traveling waves for the geographical spread of infection. *J Math Biol*, **6**: 109–130 (1978)

5 Diekmann O. Run for your life. A note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic. *J Differential Equations*, **33**: 58–73 (1979)

6 Kot M. Discrete-time travelling waves: Ecological examples. *J Math Biol*, **30**: 413–436 (1992)

7 Lewis M A. Spread rate for a nonlinear stochastic invasion. *J Math Biol*, **41**: 430–454 (2000)

8 Lewis M A, Li B, Weinberger H F. Spreading speed and linear determinacy for two-species competition models. *J Math Biol*, **45**: 219–233 (2002)

9 Li B, Lewis M A, Weinberger H F. Existence of traveling waves for integral recursions with nonmonotone growth functions. *J Math Biol*, **58**: 323–338 (2009)

10 Li B, Weinberger H F, Lewis M A. Spreading speeds as slowest wave speeds for cooperative systems. *Math Biosci*, **196**: 82–98 (2005)

11 Liang X, Zhao X Q. Asymptotic speeds of spread and traveling waves for monotone semiflows with applications. *Comm Pure Appl Math*, **60**: 1–40 (2006)

12 Lutscher F. Density-dependent dispersal in integrodifference equations. *J Math Biol*, **56**: 499–524 (2008)

13 Lui R. Biological growth and spread modeled by systems of recursions. I Mathematical theory. *Math Biosci*, **93**: 269–295 (1989)

14 Lui R. Biological growth and spread modeled by systems of recursions. II Biological theory. *Math Biosci*, **107**: 255–287 (1991)

15 Thieme H R. Asymptotic estimates of the solutions of nonlinear integral equations and asymptotic speeds for the spread of populations. *J Reine Angew Math*, **306**: 94–121 (1979)

16 Thieme H R. Density-dependent regulation of spatially distributed populations and their asymptotic speed of spread. *J Math Biol*, **8**: 173–187 (1979)

17 Thieme H R, Zhao X Q. Asymptotic speeds of spread and traveling waves for integral equations and delayed reaction diffusion models. *J Differential Equations*, **195**: 430–470 (2003)

18 Weinberger H F. On spreading speeds and traveling waves for growth and migration models in a periodic habitat. *J Math Biol*, **45**: 511–548 (2002)

19 Weinberger H F, Kawasaki K, Shigesada N. Spreading speeds of spatially periodic integro-difference models for populations with non-monotone recruitment functions. *J Math Biol*, **57**: 387–411 (2008)

20 Weinberger H F, Lewis M A, Li B. Analysis of linear determinacy for spread in cooperative models. *J Math Biol*, **45**: 183–218 (2002)

21 Bates P W, Fife P C, Ren X, et al. Traveling waves in a convolution model for phase transition. *Arch Ration Mech Anal*, **138**: 105–136 (1997)

22 Mischaikow K, Hutson V. Travelling waves for mutualist species. *SIAM J Math Anal*, **24**: 987–1008 (1993)

23 Volpert A I, Volpert V A, Volpert V A. Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems. Translations of Mathematical Monographs, 140. Providence: AMS, 1994

24 Sattinger D H. On the stability of waves of nonlinear parabolic systems. *Adv Math*, **22**: 312–355 (1976)

25 Wang Z C, Li W T, Ruan S. Existence, uniqueness and asymptotic stability of traveling wave fronts in nonlocal reaction diffusion equations with delay. *J Dynam Differential Equations*, **20**: 573–607 (2008)

26 Chen X, Fu S, Guo J S. Uniqueness and asymptotics of traveling waves of monostable dynamics on lattices. *SIAM J Math Anal*, **38**: 233–258 (2006)

27 Chen X, Guo J S. Existence and asymptotic stability of travelling waves of discrete quasilinear monostable equations. *J Differential Equations*, **184**: 549–569 (2002)

28 Ma S, Zou X. Existence, uniqueness and stability of traveling waves in a discrete reaction-diffusion monotone equation with delay. *J Differential Equations*, **217**: 54–87 (2005)

29 Smoller J. Shock Waves and Reaction Diffusion Equations. New York: Springer-Verlag, 1994

30 Cheng C P, Li W T, Wang Z C. Spreading speeds and traveling waves in a delayed population model with stage structure on a 2D spatial lattice. *IMA J Appl Math*, **73**: 592–618 (2008)