$x+2,$

这是一个定义在[0,2]上的函数,容易看出,

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1}(x+2)=3,$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1}(x-5)=-4.$$

它们和 $f(1)=10$ 没有关系.

极限与单边极限的关系,体现在下列定理中.

定理 2.11 设函数 f 在 x_0 的近旁(x_0 可能是例外)有定义. 那么, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的必要充分条件是

$$f(x_0+)=f(x_0-),$$

这个共同的值也就是函数 f 在 x_0 的极限值.

这一事实至为明显,略去不证. □

例 6 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

证明 令 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. 这个函数除了 $x=0$ 之外处处有定义. 很明显,对任何 $x\neq 0$,有

$$f(-x)=f(x).$$

这样的函数叫做偶函数. 显然可见,任何偶函数的图像关于纵轴是对称的.

首先证明 $f(0+)=1$. 实际上,考察区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,作出中心在原点、半径为 1 的圆周(称为单位圆)在第一象限那一部分中的图形. 设点 C 是过点 A 作横轴的垂线与 OB 的延长线的交点,$x=\angle AOB$ 以弧度计算. 由图 2-3 可见$\triangle AOB$ 的面积<扇形 OAB 的面积<$\triangle AOC$ 的面积.

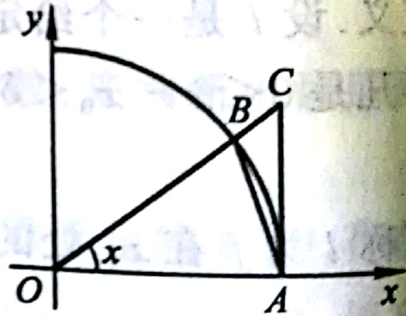

图 2-3

由于 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,上面的面积关系可以推出以下的不等式

$$\sin x<x<\tan x.$$

由此推出

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

更进一步,有

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x.$$

由于

$$0<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<\frac{x^2}{2}<\frac{\pi}{4}x,$$

所以对任给的 $\varepsilon>0$,可取 $\delta=\min\left(\frac{\pi}{2},\frac{4\varepsilon}{\pi}\right)$,凡是 $x\in(0,\delta)$时,便有

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<\frac{\pi}{4}x<\frac{\pi}{4}\delta\leqslant\varepsilon.$$

这就表明了 $f(0+)=1$.由于 f 是一个偶函数,也有 $f(0-)=1$.所以,$f(0+)=f(0-)=1$,依定理 2.11,可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.\quad\square$$

例 6 中所指出的极限,是一个十分有用的事实,不可以将它只作为一个普通的例子来对待.

例 7 计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

若令 $t=\frac{x}{2}$,那么 $x\to 0$ 等价于 $t\to 0$,根据例 6,我们有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}&=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\\&=\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}\times 1^2=\frac{1}{2}.\quad\square\end{aligned}$$

例 7 中所用的技巧:令 $t=\frac{x}{2}$,称为变量代换,又称换元,在数学分析的各个部分中都是非常有用的.

我们再叙述并证明函数极限的三条性质.在证明其中的两条性质的时候,没有直接援用函数极限的定义,而是采用了另外一种手法,即利用了定理 2.9(函数极限与数列极限的关系).

1. 设 $c>0, a_1=\frac{c}{2}, a_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{a_n^2}{2}, n=1,2,\cdots$，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\begin{cases}1-\sqrt{1-c}, & 0<c\leqslant 1;\\ +\infty, & c>1.\end{cases}$$

2. 数列 $\{u_n\}$ 定义如下：$u_1=b$，

$$u_{n+1}=u_n^2+(1-2a)u_n+a^2, n=1,2,\cdots.$$

问 a, b 为何值时 $\{u_n\}$ 收敛？极限值是什么？

3. 设 $A>0, 0<y_0<A^{-1}$，

$$y_{n+1}=y_n(2-Ay_n), n=0,1,\cdots.$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=A^{-1}$.

4. 数列 $\{a_n\}$ 由下式定义

$$a_n=2^{n-1}-3a_{n-1}, n=1,2,\cdots.$$

求 a_0 所有可能的值，使得 $\{a_n\}$ 是严格递增的.

§1.7 自然对数底e

在中学里，我们已经知道，不只是在数学里，而且是在全部科学中，圆周率 π 是一个十分重要的常数. 现在我们来介绍另一个十分重要的常数：自然对数的底 e.

同时考察如下的两个数列：

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n\in\mathbf{N}^*,$$

$$s_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}, n\in\mathbf{N}^*.$$

显然，数列 $\{s_n\}$ 是严格递增的. 并且，由于

$$s_n\leqslant 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

即 $\{s_n\}$ 有上界，从而 $s=\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在.

利用二项式展开，得

$$e_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

这里共有 $n+1$ 个加项. 在 e_{n+1} 的类似展开式中,将有 $n+2$ 个加项,在其中的最初 $n+1$ 个加项中每一项都不会小于 e_n 的相同位置上的项,而最后一个加项是一个正数. 这就说明:对 $n \in \mathbf{N}^*$,我们有 $e_n < e_{n+1}$,即 $\{e_n\}$ 也是一个严格递增的数列. 此外,由 e_n 的展开式中可以看出,

$$e_n \leqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = s_n < 3$$

对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立. 这就证明了 $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to\infty} e_n$ 的存在性,并且得知 $\mathrm{e} \leqslant s$.

另一方面,当 $n \geqslant m$ 时,我们有

$$e_n \geqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right).$$

把 $m \in \mathbf{N}^*$ 暂时地固定,同时令 $n \to \infty$,由上式知

$$\mathrm{e} \geqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!}.$$

这时再令 $m \to \infty$,得出 $\mathrm{e} \geqslant s$. 于是我们证明了 $\mathrm{e} = s$. 这个共同的值被记作 e. 以 e 作为底而作成的对数称为**自然对数**. 为了与大家已经习惯了的以 10 为底的对数符号 lg 区别开来,自然对数符号常记作 ln,也记作 log. 在本书中,除了少数显著申明了的情形,我们谈到"对数"都是指自然对数. 其中的理由,到第 3 章便可明白.

我们已经证明,数列 $\{e_n\}$ 与 $\{s_n\}$ 都递增地收敛于 e. 这两个事实都有理论上的意义. 从计算来看,使用极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}$$

更为有利. 我们取充分大的 n,用 s_n 来作为 e 的近似值. 由于

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)!} = s_n + \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n+1},$$

在计算 s_{n+1} 的时候,就能充分地用上面已经算出的 s_n 的数值,并且只须多作一次除法运算(除以 $n+1$). 我们利用计算器,很容易地对 $n \leqslant 10$ 算出 s_n 到小数点后 7 位小数. 例如

$$s_8 = 2.718\,278\,7,$$

$$s_9 = 2.718\,281\,5,$$

$$s_{10}=2.718\ 281\ 8.$$

由这种近似所产生的误差，可以用下列方法来作估计：由于

$$\begin{aligned}0<s_{n+m}-s_n&=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+m)!}\\&=\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)\cdots(n+m)}\right]\\&<\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}\right)^{m-1}\right]\\&<\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!\ n}.\end{aligned}$$

令 $m\to\infty$，得到

$$0<e-s_n\leqslant\frac{1}{n!\ n},n\in\mathbf{N}^*.\tag{1}$$

因此，用 s_{10} 来逼近 e 所产生的误差将小于 10^{-7}. 特别地，我们看到 e<3.

我们来证明下面的

定理 1.10 自然对数的底 e 是无理数.

证明 用反证法. 假设 $e=\frac{p}{q}$，其中 $p,q\in\mathbf{N}^*$. 由于 $2<e<3$，可见 e 不是正整数. 因此 $q\geqslant2$. 由(1)可得

$$0<q!\ (e-s_q)\leqslant\frac{1}{q}\leqslant\frac{1}{2}.\tag{2}$$

但是

$$q!\ (e-s_q)=(q-1)!\ p-q!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)$$

是整数，这与(2)矛盾！ □

通过上述讨论，我们看到，数列 $\{e_n\}$ 与 $\{s_n\}$ 的各项都是有理数，但是它们的极限却是无理数. 我们又一次地看到了在全体有理数中添加无理数的必要性. 如果不这样做，极限运算就无法进行.

是确定的实数. 在单边极限 $\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)$ 中, x_0 也是确定的实数. 有很多理由说明, 有必要放宽 x_0 或 l 为实数这一限制. 例如说, 某种放射性物质的质量是时间 t 的函数, 随着时间的无限延长, 这一物质的质量可以变得"要多小就有多小", 这时 t 所接近的就不是一个实数. 这就是另外一种形式的极限.

由于 x_0 与 l 的不同状态和各种不同的搭配, 将得到许许多多不同形式的极限. 我们只讨论其中的两种. 事实上, 只要对前节那种形式的极限的原理有透彻的了解, 就可以举一反三, 触类旁通, 那种几乎是重复的、使人感到乏味的叙述也就成为多余的了.

定义 2.12 设 l 是一确定的实数, 表达式

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=l$$

的意思是: 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一个正数 A, 凡是 x 满足 $|x|>A$ 时便有 $|f(x)-l|<\varepsilon$. 这时, 我们说"当 x 趋向于无穷时, 函数 f 有极限 l". 上式也可以简记为

$$f(x)\to l=f(\infty)(x\to\infty).$$

至此, 我们不难联想如何用"精确语言"来定义

$$f(x)\to l(x\to+\infty),$$

$$f(x)\to l(x\to-\infty).$$

这里仅对第二个表达式给出:

定义 2.13 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一个正数 $A>0$, 使得凡是 $x<-A$ 时, 便有

$$|f(x)-l|<\varepsilon$$

成立. 在这种情况下, 我们说"在负无穷处函数 f 有 l 极限", 记为

$$f(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=l.$$

第一个表达式的精确定义请读者自行给出.

显然, 我们有下列的

定理 2.15 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$ 当且只当

$$f(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=l,$$

$$f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$$

同时成立.

例 1 设

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]},x\geqslant1,$$

这里 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 试求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

解　在§1.7中，已经证明数列$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$递增地趋向于自然对数的底e.因此，对于任给$\varepsilon>0$的，存在$N\in\mathbf{N}^*$，使得

$$0<e-\left(1+\frac{1}{N}\right)^N<\varepsilon.$$

由于f是递增的函数，当$x\geqslant N$时我们有$[x]\geqslant N$，便有

$$0<e-f(x)\leqslant e-\left(1+\frac{1}{N}\right)^N<\varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}=e.\ \square$$

建议读者用"$\varepsilon-A$语言"来证明下列更加容易证明的极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)=1.$$

在§2.4中，我们证明了许多定理(例如，从定理2.6到定理2.10)，其中有关于极限的四则运算的定理、夹逼原理等等，它们虽然说是对"$x\to x_0$"这种极限过程来叙述和证明的，但是它们对其他的极限过程显然也是适用的，只是应当在同一类极限过程中加以运用.至于定理2.10，即Cauchy收敛原理，只需加以明显的改动，也可以成立.

例如，应用极限的四则运算法则，可以得到：

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)\\&=e\cdot1=e;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1}\\&=e\cdot\frac{1}{1}=e.\end{aligned}$$

下面的例子和§2.4的例6一样是另一个重要的极限.

例2　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$

证明　先设$x\geqslant1$，由不等式$[x]\leqslant x<[x]+1$得出

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

我们已经知道：当$x\to+\infty$时，上式左、右两边的函数趋向于极限e，由夹逼原理

便知

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

现在再来讨论 $x\to-\infty$. 令 $y=-(x+1)$. 易知，当 $x\to-\infty$时 $y\to+\infty$，而

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1}=\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(1+\frac{1}{y}\right)$$

$$\to\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}\quad(y\to+\infty),$$

所以

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.\ \square$$

练习题 2.5

1. 用 $\varepsilon-A$ 语言来证明：

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{3x^2-x+1}=\dfrac{1}{3}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{2x+3}=\dfrac{3}{2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-a})=0$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})=0$.

2. 定出常数 a 和 b，使得下列等式成立：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$;

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$.

3. 证明：

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1})=0.$$

4. 设常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，求证：

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\sin\sqrt{x+k}=0.$$

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

6. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$，其中 $b\neq0$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$;