第三节

用导数研究函数的性质

——单调性、极值和最大最小值

主要内容:

一、函数的单调性

二、函数的极值

三、函数的最大值和最小值

本节将以导数为工具，讨论函数的单调性、给出寻找函数的极值、极值点与最值的的方法，这个方法既简便又具有一般性.

一、函数的单调性

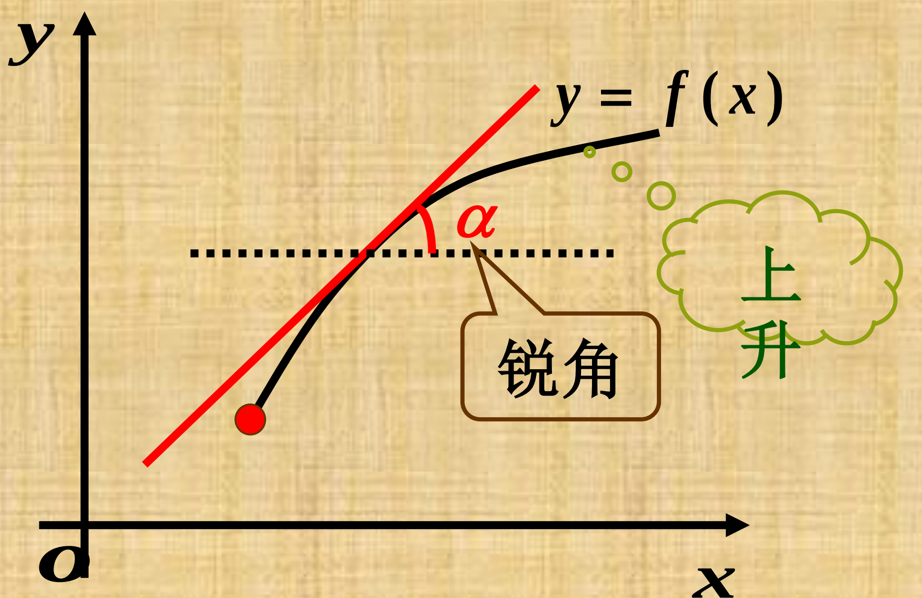
函数的单调性与导数符号之间的关系：

观察右图

α是锐角

$\Rightarrow \tan\alpha \geq 0$

$\Rightarrow f'(x) \geq 0.$



函数$f(x)$单调增加，$f'(x) \geq 0.$

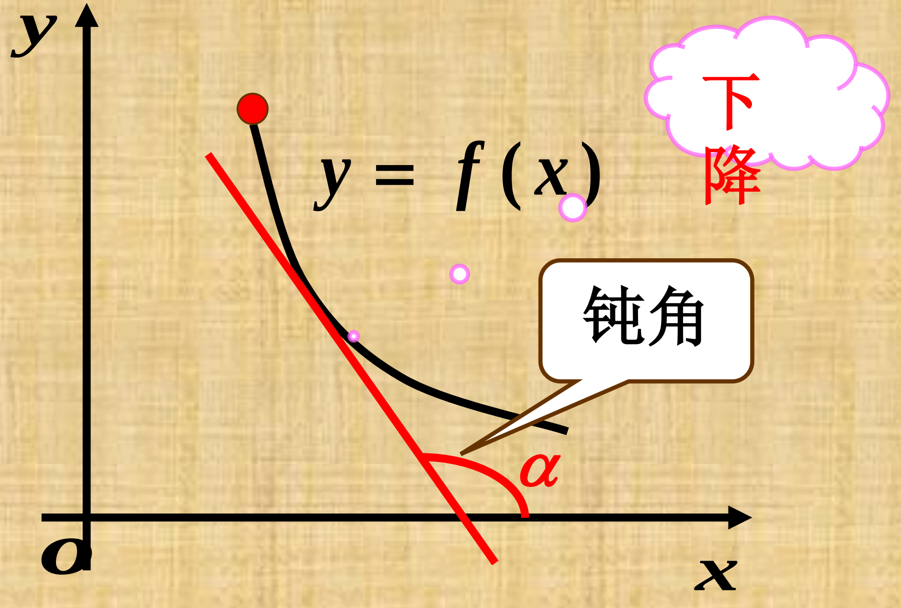
下面我们来看另外一种情况:

观察右图

α是钝角

$\Rightarrow \tan\alpha \le 0$

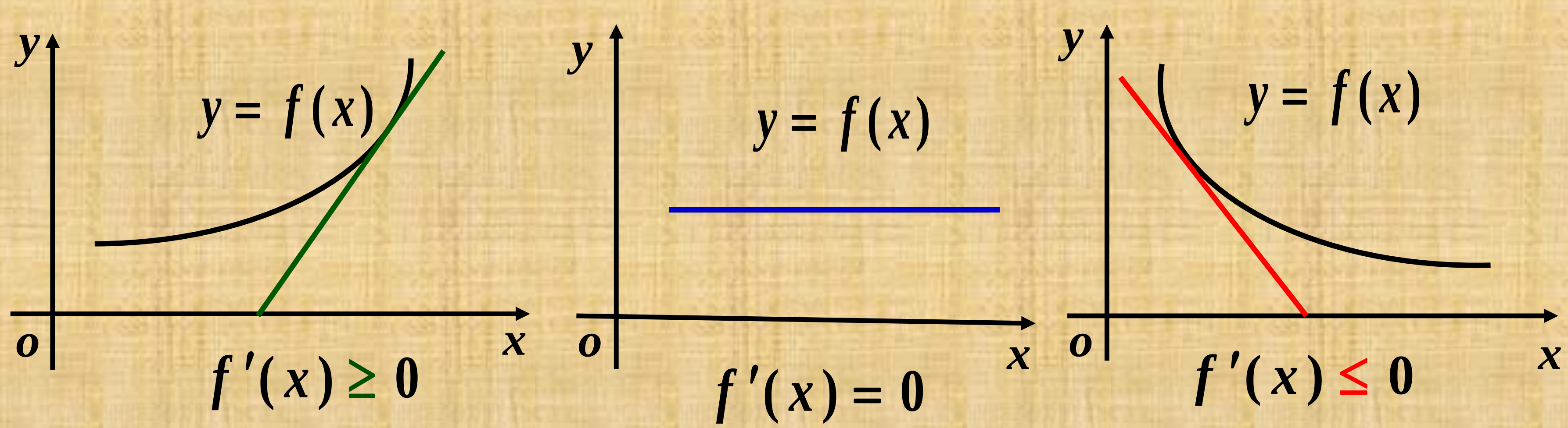
$\Rightarrow f'(x) \le 0.$



函数$f(x)$单调减少，$f'(x) \le 0.$

导数符号的几何意义：

对于某区间上的函数$f(x)$,导数为正，曲线上升；导数为零，曲线不升不降(水平曲线);导数为负，曲线下降.



定理

设函数$f(x)$在区间(a,b)内可导，则函数$f(x)$在区间(a,b)内单调增加(单调减少)的充分必要条件是：$f'(x) \geq 0(f'(x) \leq 0)$，$x \in (a,b)$，而$f'(x) = 0$只在个别点处成立.

注意：函数的单调性是一个区间上的性质，要用导数在这一区间上的符号来判定，而不能用一点处的导数符号来判别一个区间上的单调性.

例1 证明函数$y = x - \ln(1 + x^2)$是单调增加的.

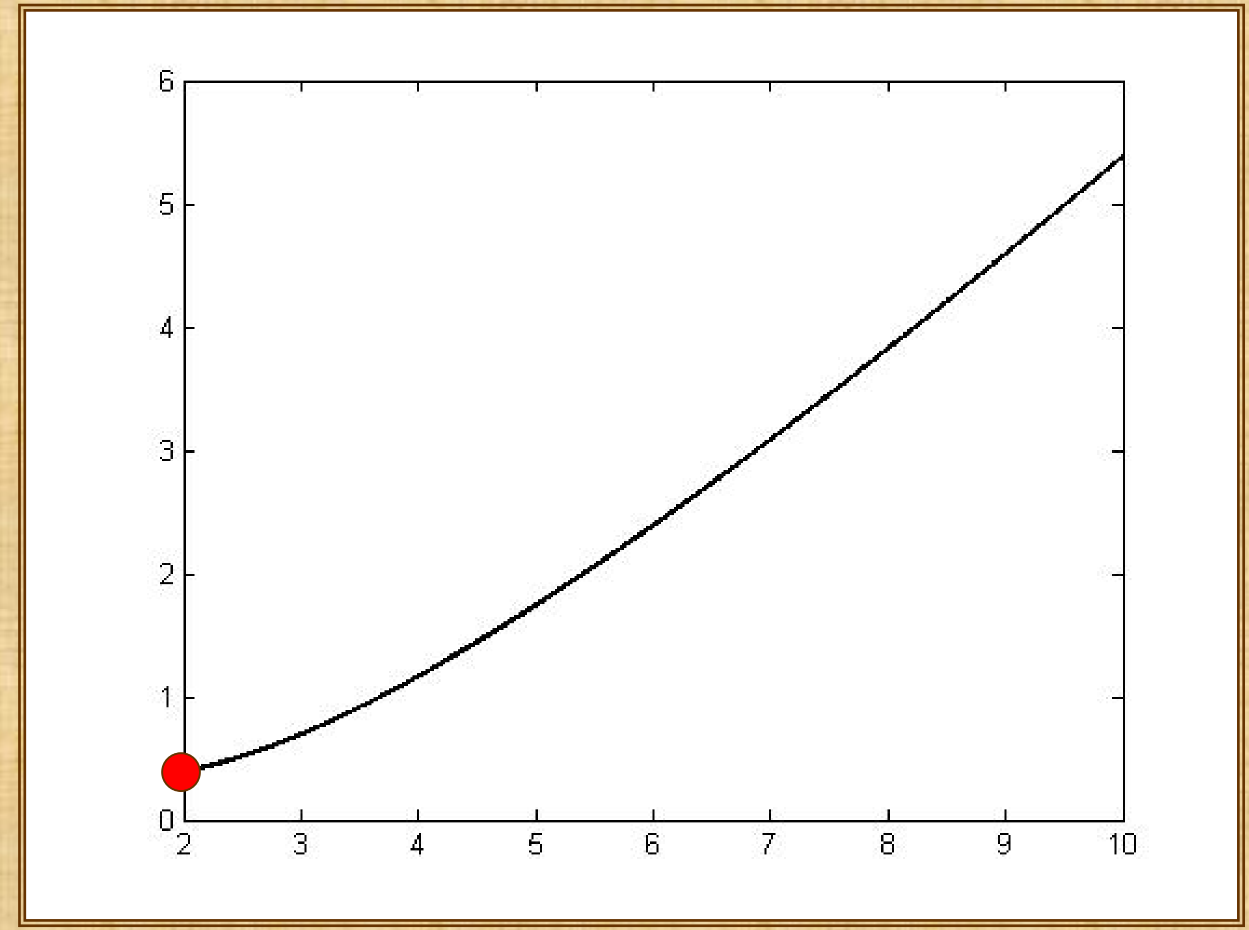
提示与分析:单调增加 $\longleftrightarrow$ $f'(x) \geq 0.$

证 $y = x - \ln(1 + x^2)$, $D = (-\infty, +\infty)$.

$$y' = [x - \ln(1 + x^2)]' = 1 - \frac{1}{1 + x^2} \cdot 2x = \frac{(1 - x)^2}{1 + x^2} \geq 0.$$

所以函数$y = x - \ln(1 + x^2)$是单调增加的.

例1 证明函数$y = x - \ln(1+x^2)$是单调增加的.



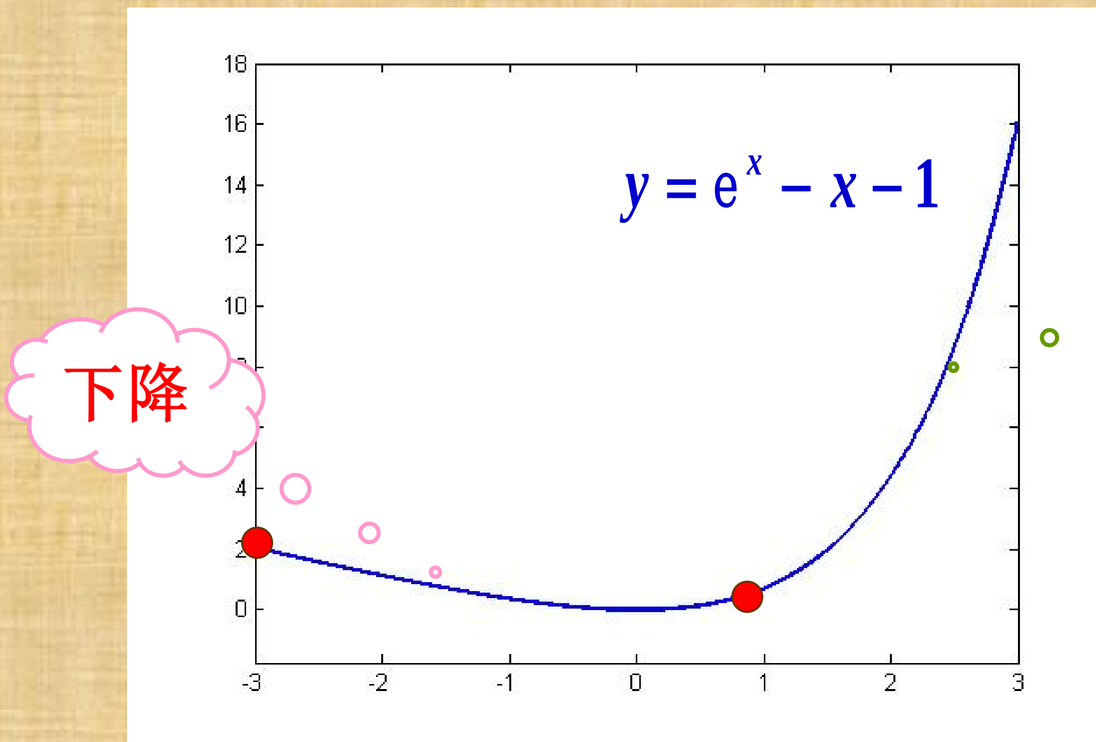
例2　讨论函数$y=\mathrm{e}^x-x-1$的单调性.

解　$\because\ y'=\mathrm{e}^x-1,\ D=(-\infty,+\infty).$

$\therefore$ 在$(-\infty,0)$内，$y'<0$，函数单调减少；

在$(0,+\infty)$内，$y'>0$，函数单调增加.

例2　讨论函数$y = e^x - x - 1$的单调性.



上升

单调区间

函数在整个定义域内不是单调的，但在子区间上单调.

如何求函数的单调区间?

- 函数的驻点和不可导点，可能是函数单调区间的分界点.

- 求单调区间的方法：

用方程 $f'(x)=0$ 的根及 $f'(x)$ 不存在的点来划分函数 $f(x)$ 的定义区间,然后判断区间内导数的符号.

例3　求函数$y=(x-1)^2-4$的单调区间.

解　$\because\ y'=2(x-1),\quad D=(-\infty,+\infty).$

$\therefore$ 在$(-\infty,1)$内, $y'<0$, 函数单调减少;

在$(1,+\infty)$内, $y'>0$, 函数单调增加.

故函数$y=(x-1)^2-4$的单调区间为

$\underline{\underline{(-\infty,1)}},\ \underline{\underline{(1,+\infty)}}.$

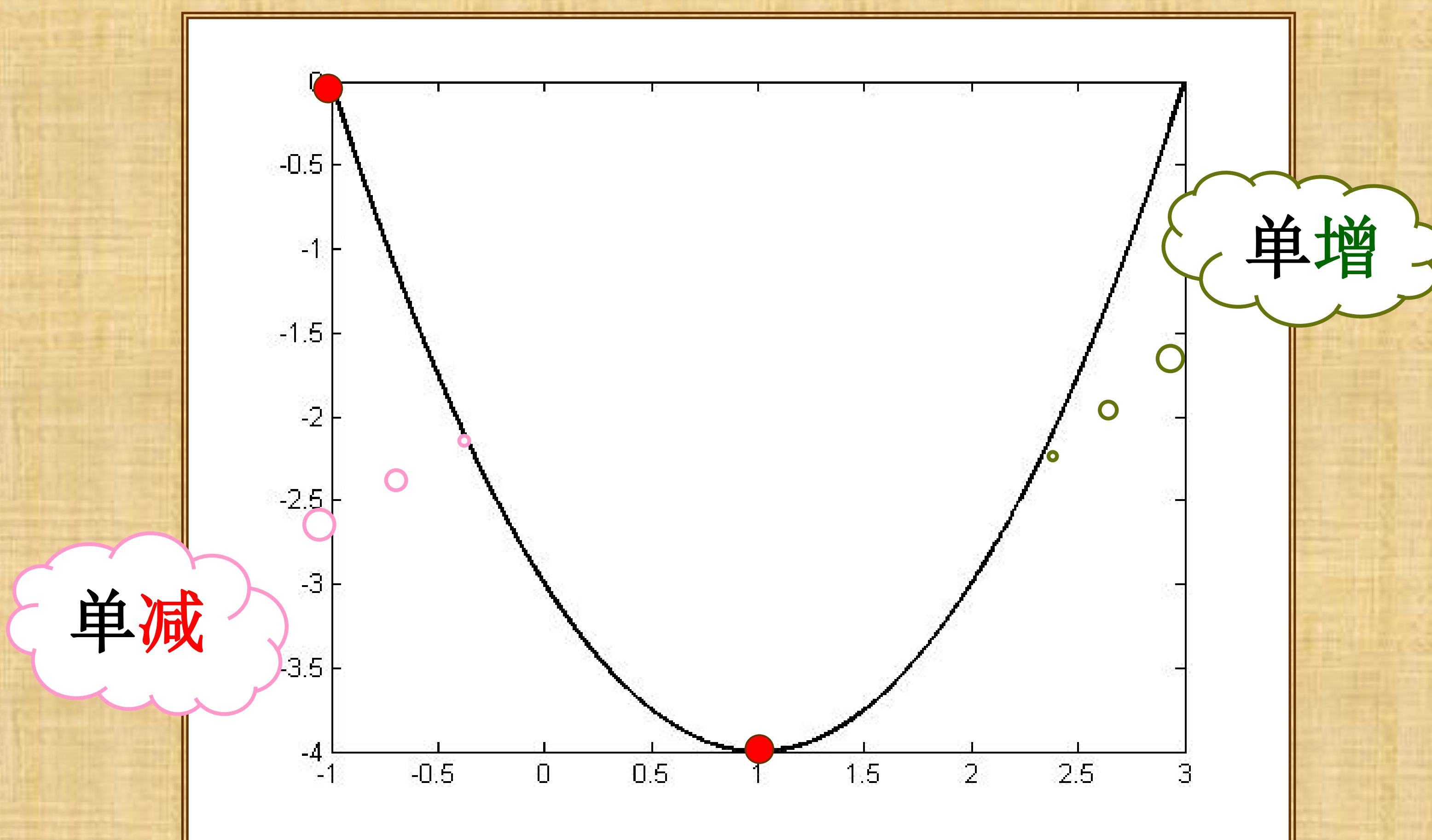
单减区间

单增区间

例3　求函数$y=(x-1)^2-4$的单调区间.

$y=(x-1)^2-4$的单调减区间为$(-\infty,1)$,

单调增区间$(1,+\infty)$.



二、函数的极值

如何利用导数求函数的极值呢？

费马定理告诉我们，可导函数$y = f(x)$在点x_0取得极值的必要条件是$f'(x_0) = 0$.

x_0是驻点

驻点中哪些是极值点呢？

下面我们来介绍两种判别方法

判别法则I(第一充分条件)　设函数$f(x)$满足

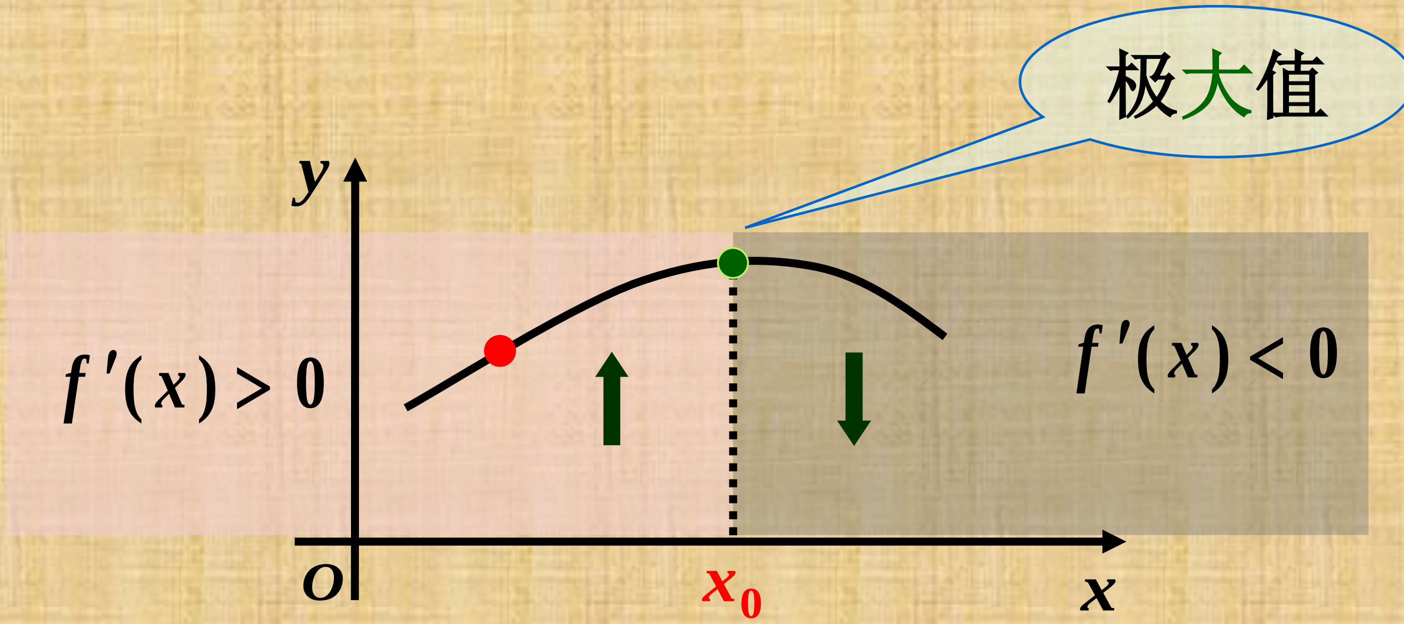
(1)在点x_0的邻域内可导;

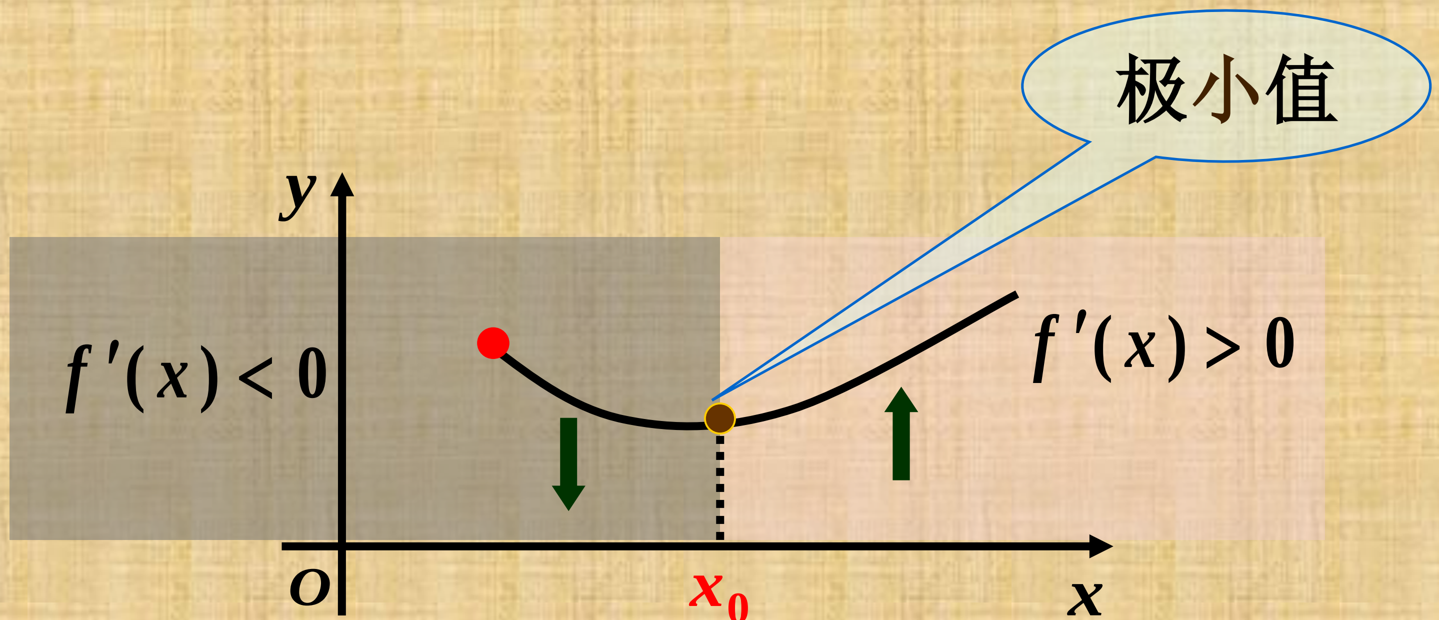
(2) $f'(x_0)=0$, 那么,

1°若在x_0左侧附近$f'(x)>0$,在x_0右侧附近$f'(x)<0$,则$f(x_0)$为极大值;

2°若在x_0左侧附近$f'(x)<0$,在x_0右侧附近$f'(x)>0$,则$f(x_0)$为极小值;

3°若在x_0左、右两侧附近$f'(x)$同号,则$f(x_0)$不是极值点.


极大值
y
f′(x) > 0
f′(x) < 0
O
x₀
x


极小值
y
f′(x) < 0
f′(x) > 0
O
x₀
x

求极值的步骤:

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 求驻点，即方程 $f'(x) = 0$ 的根;

(3) 检查$f'(x)$在驻点两侧的符号，判断是否是极值点;

(4) 求极值.

例5 求函数 $f(x)=(x-1)^3(x+\frac{1}{3})$的极值.

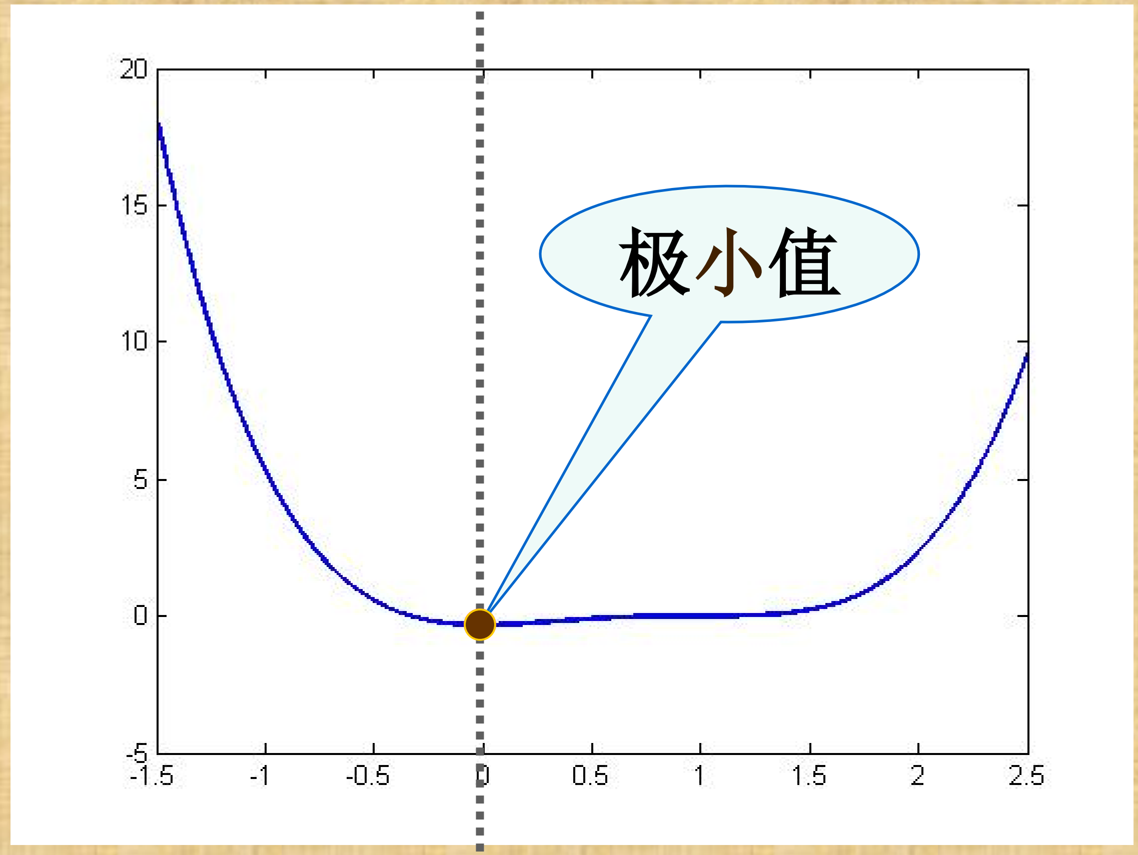
解 $f'(x)=3(x-1)^2(x+\frac{1}{3})+(x-1)^3=4x(x-1)^2$

令 $f'(x)=0$, 得驻点$x_1=0, x_2=1.$ 列表讨论

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$	不是极值	$\uparrow$

极小值 $f(0)=-\frac{1}{3}.$

$$f(x)=(x-1)^3(x+\frac{1}{3})$$ 图形如下：



用判别法则Ⅰ时，只需求函数的一阶导数，但需判断驻点两侧导数的符号，这显得比较麻烦. 于是就有了判别法则Ⅱ，可以很方便的判断出是不是极值.

局部凹

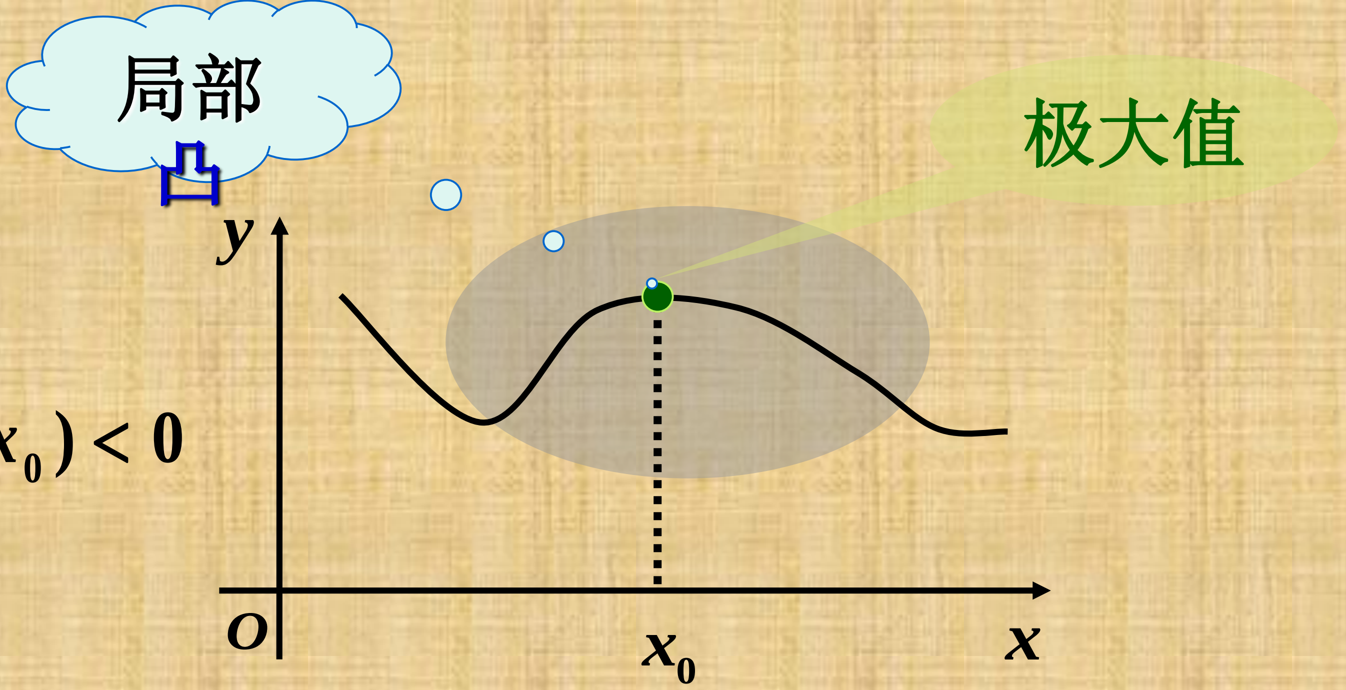
x_0是**驻点**

局部凸

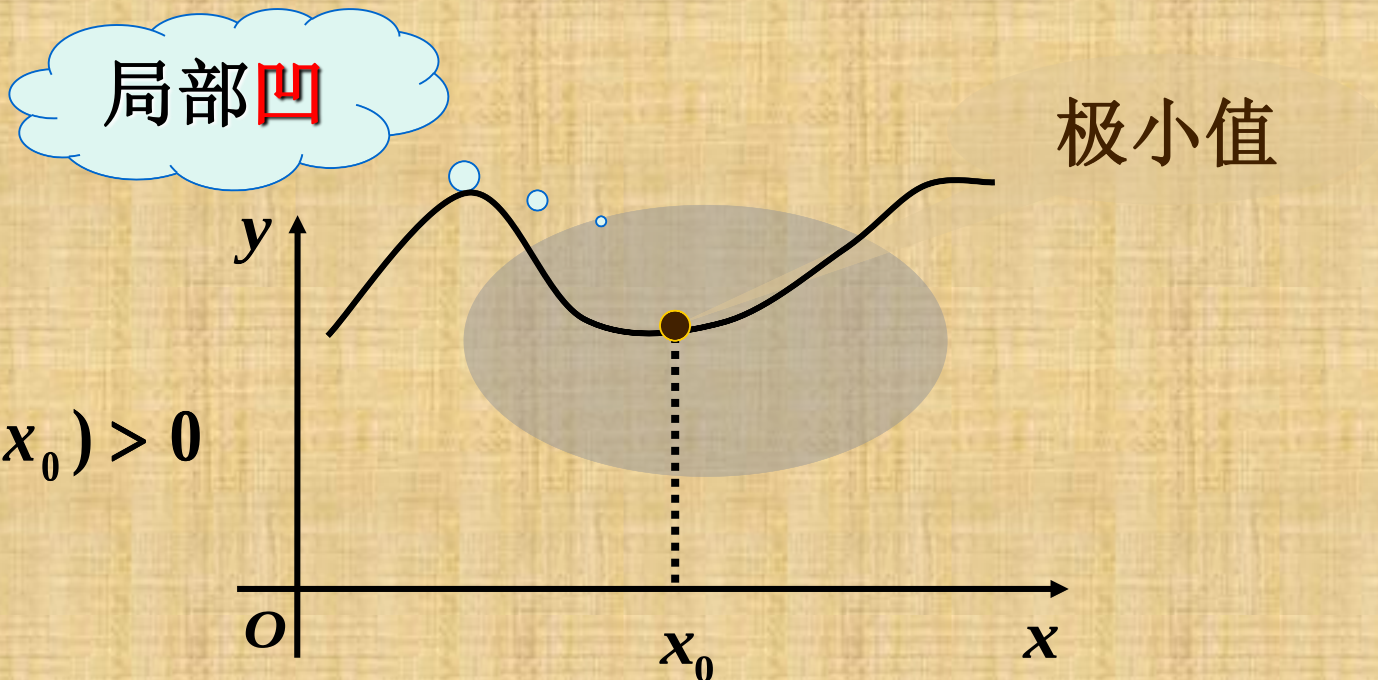
判别法则Ⅱ(第二充分条件) 设函数$f(x)$满足

(1)在点x_0存在二阶导数；(2) $f'(x_0)=0$,

若$f''(x_0)<0$,则$f(x_0)$为极大值；若$f''(x_0)>0$,则$f(x_0)$为极小值；若$f''(x_0)=0$,则不能判别$f(x_0)$是否为极值，改用判别法则I.



$f''(x_0) < 0$



$f''(x_0) > 0$

我们用判别法则Ⅱ来求解例6

例6 求函数 $f(x)=x^3+\dfrac{3}{x}$的极值.

解 $f'(x)=3x^2-\dfrac{3}{x^2}$,

$f'(x)=0$得驻点$x_1=1, x_2=-1.$

$f''(x)=6x+\dfrac{6}{x^3}$,

$f''(1)=12>0$, $f(1)$是极小值;

$f''(-1)=-12>0$, $f(-1)$是极大值.

三、函数的最大值和最小值

我们在日常的生产活动中经常会遇到这些问题：

商品经营者如何制定价格才能使利润最高；

工厂订购生产资料要考虑怎样才能使订货和贮存费用最低；

这些问题都可归结为求解函数的最值问题.

求最值的步骤:

1. 求函数的定义域;

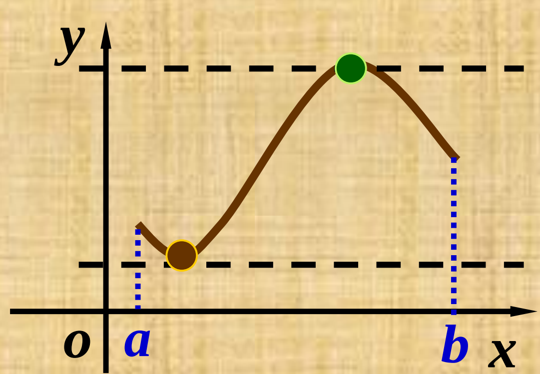
2. 求驻点和不可导点;

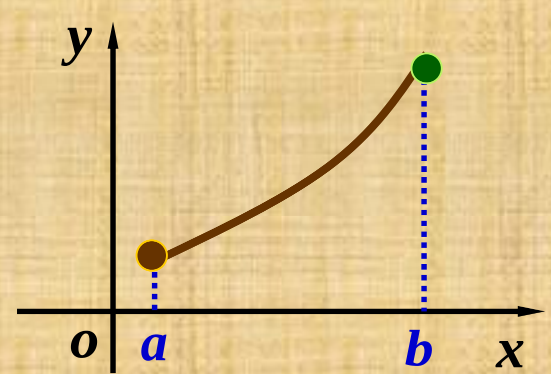
3. 求区间端点及驻点和不可导点的函数值, 比较大小, 哪个大哪个就是最大值, 哪个小哪个就是最小值;

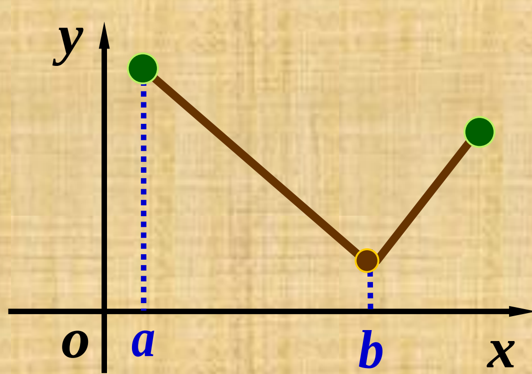
最值来源于三种情况:

端点、驻点、不可导点.

最值来源于三种点：端点、驻点、不可导点







最值在驻点处取得

最值在端点处取得

最值分别在端点和不可导点处取得

例7 求函数 $y=2x^3+3x^2-12x+14$ 在$[-3,4]$上的最大值与最小值.

没有不可导点

找出端点、驻点、不可导点的值进行比较

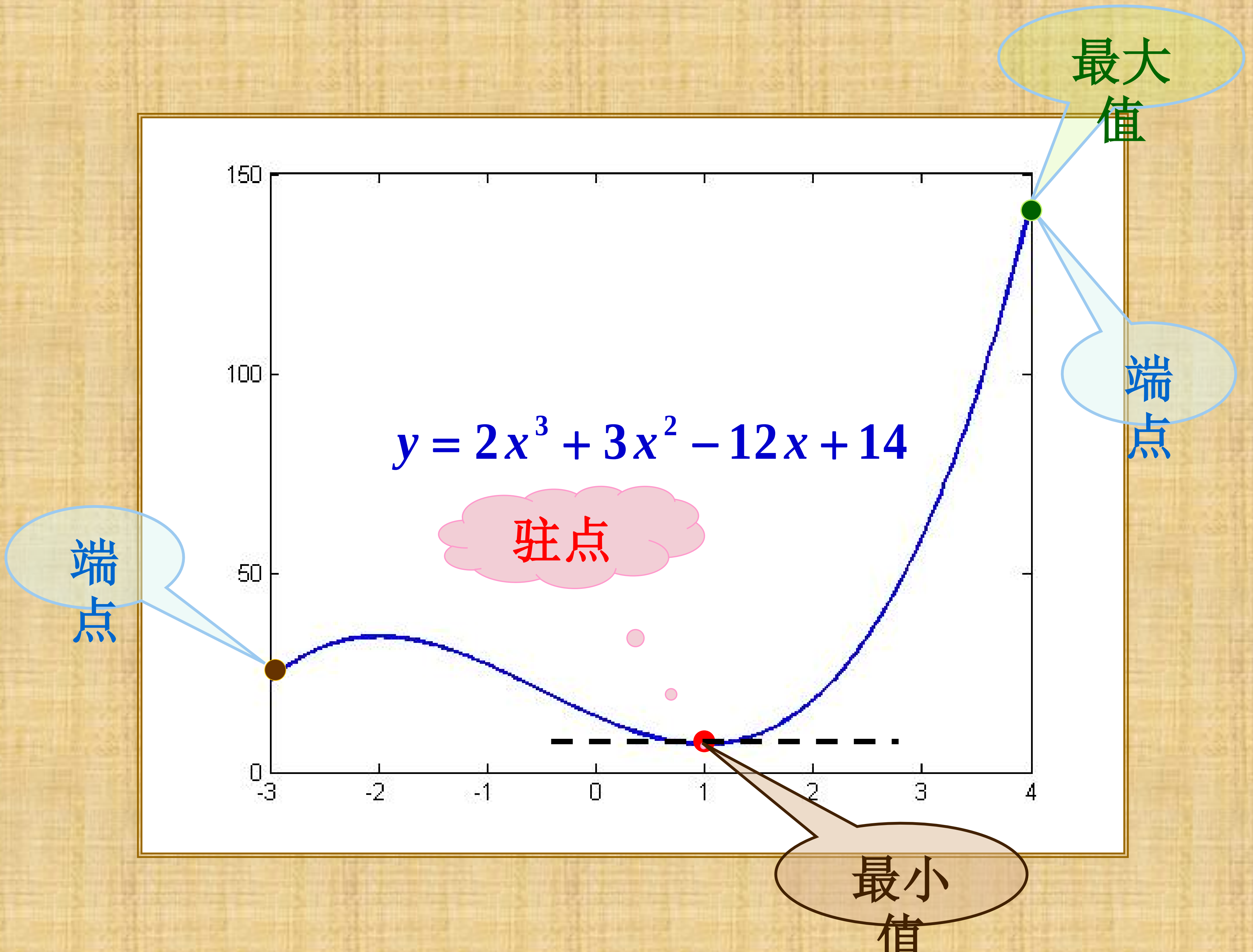
解 因为 $f'(x)=6(x+2)(x-1)$,

解方程 $f'(x)=0$,得$x_1=-2,\ x_2=1.$

计算 $f(-3)=23;\ f(4)=142;$ 端点值

$f(1)=7;\quad f(-2)=34,$ 驻点值

比较得 最大值 $f(4)=142$, 最小值 $f(1)=7.$



最大值
端点
端点
$y=2x^3+3x^2-12x+14$
驻点
最小值
150
100
50
0
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

实际问题求最值应注意:

(1) 建立目标函数;

(2) 求最值;

若目标函数只有唯一驻点,则该点的函数值即为所求的最大(或最小)值.

例8 某房地产公司有50套公寓要出租，当租金定为每月1000元时，公寓会全部租出去．当租金每月增加50元时，就有一套公寓租不出去，而租出去的房子每月需花费100元的整修维护费．试问房租定为多少可获得最大收入？

解 设房租每月为x元，

那么租出去的房子有$50-\left(\dfrac{x-1000}{50}\right)$套，

每月总收入为

$$R(x)=(x-100)\left(50-\frac{x-1000}{50}\right)$$

$$R(x)=(x-100)(70-\frac{x}{50}),$$

$$R'(x)=(70-\frac{x}{50})+(x-100)(-\frac{1}{50})=72-\frac{x}{25},$$

$R'(x)=0 \Rightarrow x=1800,$ （唯一驻点）

故每月每套租金为1800元时收入最高.

最大收入为 $R(x)=(1800-100)(70-\dfrac{1800}{50})$

$=57800$(元).

此时, 没租出去的公寓有 $\dfrac{1800-1000}{50}=16$(套).

课后作业

习题 4 (pages 122-123)

1(1)， 3(3)(6)，6(1)，10