

La conjetura de Stanley sobre el h -vector de una matroide

José Alejandro Samper

21 de junio de 2011

Agradecimientos

Quiero darle las gracias a Federico Ardila por mostrarme el problema y guiarme todo este tiempo. También le quiero dar las gracias a Federico Castillo (también conocido como Yapi), por el trabajo final de geometría discreta que se terminó transformando en esto. Gracias a los jurados, José Ricardo Arteaga y Tristram Bogart, por leer el documento.

Finalmente, gracias a mis papas por haberme apoyado estos 4 años que se terminan con este trabajo. Su ejemplo, soporte y ayuda no tiene precio.

Índice

1. Introducción	4
1.1. Notación	5
2. Teoría de Matroides	7
2.1. Complejos y multicomplejos simpliciales	7
2.2. Matroides: Independientes, bases y rango	8
2.3. Dualidad	13
2.4. El polinomio de Tutte	17
2.5. Complejos descascarables y h -vectores	24
3. La conjetura de Stanley	31
4. La conjetura para matroides cográficas	34
4.1. Matroides gráficas	34
4.2. El juego del dólar	40
4.3. La prueba	44
5. Algunas conjeturas alternativas	52
5.1. La geometría del juego del dólar	52
5.2. L -Polinomios	55

1. Introducción

Los complejos simpliciales forman una familia de objetos que ha aparecido de manera natural en la matemática moderna. Además de ser objetos interesantes por sí solos, son una herramienta muy poderosa tanto para matemáticos puros como aplicados, dada su simultánea simplicidad y complejidad. Los topólogos se encuentran y con estos objetos cuando triangulan variedades compactas. La homología simplicial que define la característica de Euler viene de estudiar complejos de manera algebraica. En optimización hay varios algoritmos construidos sobre su estructura. Es por esto que el estudio de los complejos simpliciales se ha vuelto de gran interés en el mundo de las matemáticas.

El objetivo de este trabajo es presentar algunos resultados interesantes sobre una familia muy especial de complejos simpliciales: las matroides. Estos son objetos que aparecen naturalmente en el estudio de independencia lineal en espacios vectoriales, el estudio de la estructura de los ciclos y arboles generadores de grafos y matrimonios en grafos bipartitos.

A mediados de los años 70, Richard Stanley empezó a estudiar los complejos simpliciales asociando a cada uno un objeto anillo y un espacio vectorial especial. Resulta que estos objetos puramente algebraicos codifican varias propiedades importantes de los complejos. Teniendo tantas caracterizaciones de las matroides como complejos, surge la pregunta natural de encontrar estructuras adicionales dentro de estas álgebras asociadas. Fue así, que en 1977 apareció en [15] una conjetura que asociaba un objeto geométrico a las matroides, que provenía de un teorema probado en general para una familia especial de complejos. La conjetura, que le asocia una estructura geométrica al complejo, sigue sin ser resuelta en su gran generalidad. Existen varios resultados que prueban la conjetura en diferentes familias de matroides, pero las técnicas usadas son muy diferentes para cada caso.

En este trabajo se presentará una motivación para estudiar los objetos involucrados en la conjetura, presentar algunos resultados parciales y reformular una demostración conocida de un caso particular de la conjetura en términos algebraicos, esperando poder usar las nuevas construcciones para producir una prueba de la conjetura en un futuro próximo.

En el segundo capítulo se introduce la teoría de matroides y se presentan las herramientas necesarias para entender la conjetura. En particular se muestran diferentes presentaciones de la estructura de matroide y se introduce la teoría del polinomio de Tutte. También se caracterizan las matroides entre los complejos simpliciales según sus descascaramientos.

En el capítulo tres se presenta la conjetura, muestra un ejemplo de esta y se hace un

recuento de los casos particulares que se conocen.

El capítulo cuatro está dedicado a la prueba de la conjetura para la familia de matroides cográficas. Se presenta el juego del dólar, una variación del modelo de la pila de arena para grafos del que se desprende un grupo que codifica información de un grafo. Se usa una mezcla de esto y la teoría de invariantes de Tutte-Grothendieck para probar el caso especial de la conjetura.

El quinto capítulo presenta conjeturas alternativas que, en caso de ser ciertas, implican la conjetura de Stanley. Se acompañan las presentaciones de las conjeturas con ejemplos computacionales.

Uno de los propósitos de este documento es que una persona con buenas bases de álgebra lineal y un pequeño conocimiento de álgebra abstracta pueda entender bien de que se trata el documento. Es por eso que en los primeros cuatro capítulos se prueban todos los teoremas.

1.1. Notación

- \subset denota contención estricta.
- \mathbb{N} denota el conjunto de los números naturales. Por convención $0 \in \mathbb{N}$.
- \mathbb{Z} denota el conjunto de los números enteros. \mathbb{Z}^+ es el conjunto de los enteros positivos.
- Para cada elemento $v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ de \mathbb{N}^k se define $\mathbf{x}^v = x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_k^{v_k}$ donde x_1, x_2, \dots, x_k son variables algebraicamente independientes.
- Para un conjunto A , $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de subconjuntos de A . $\binom{A}{k}$ es el conjunto de subconjuntos de A que tienen tamaño k .
- Si A y B son conjuntos $A - B$ es el conjunto que normalmente se denota por $A \setminus B$. Esto pues se usa el símbolo \setminus para una operación especial de matroides. Para a es un elemento de A se denota $A - a$ a el conjunto que resulta de eliminar a de A .
- Para $n \in \mathbb{Z}^+$, $[n]$ denota el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.
- Para \mathbb{F} un campo y A un conjunto, \mathbb{F}^A denota el espacio vectorial sobre \mathbb{F} que tiene una coordenada por cada elemento de A . Los vectores de \mathbb{F}^A se denotan por $(x_a)_{a \in A}$, donde $x_a \in \mathbb{F}$ para cada $a \in A$. Se define $e_a := (\delta_{aa'})_{a' \in A}$ donde δ es la función de Kronecker. El conjunto $\{e_a \mid a \in A\}$ es la base canónica de \mathbb{F}^A .

- Para \mathbb{F} un campo y A, B son conjuntos, $M_{A \times B}(\mathbb{F})$ denota el conjunto de matrices cuyas filas y columnas están indexadas por los elementos de A y de B respectivamente. Para $Q \in M_{A \times B}(\mathbb{F})$ se denota como $Q_{a,b}$ la entrada en la fila a y la columna b de Q , para cada pareja $(a, b) \in A \times B$.

2. Teoría de Matroides

2.1. Complejos y multicomplejos simpliciales

A continuación se presentaran algunas definiciones básicas que se usarán a través del texto.

Definición 2.1. Un **complejo simplicial** es una pareja ordenada $\Delta = (E, I)$ donde E es un conjunto finito e I es un subconjunto del conjunto potencias $\mathcal{P}(E)$ que satisface las siguientes propiedades:

- i. $\emptyset \in I$
- ii. Si $B \subset A$ y $A \in I$, entonces $B \in I$.

Los elementos del conjunto I de un complejo simplicial se llaman **caras**.

Un complejo simplicial induce naturalmente un poset $\mathcal{P}_\Delta = (I, \subseteq)$. Este poset es una de las herramientas más interesantes que existen para estudiar complejos, pues hay una gran cantidad de herramientas ya conocidas para trabajar con posets finitos.

Definición 2.2. Un complejo simplicial Δ se llama **puro** si los elementos maximales de \mathcal{P}_Δ tienen todos el mismo tamaño.

Definición 2.3. Para cada $i \in \mathbb{Z}^{\geq -1}$ sea f_i el número de elementos en I con tamaño $i + 1$. El **f -vector** de un complejo es dado por $(f_{-1}, f_0, \dots, f_k)$, donde $k + 1$ es el tamaño del conjunto más grande de I . El polinomio $f_\Delta(x) = \sum_{j=0}^{k+1} f_{j-1} x^{k+1-j} = \sum_{A \in I} x^{k+1-|A|}$ se llama el **f -polinomio** de Δ .

Nótese que las definiciones anteriores se pueden extender a complejos sobre multiconjuntos. Estos complejos se llaman **multicomplejos**. Durante este trabajo se utilizarán varias presentaciones diferentes de estos objetos.

Existen muchas formas de presentar un multiconjunto. Una de ellas es indicando quienes son los elementos y cual es la multiplicidad de cada uno. También se puede codificar cada elemento con una variables e identificar los multiconjuntos con monomios en las variables, donde el exponente de cada variable en el monomio es su multiplicidad en el multiconjunto. Si

los elementos del multiconjunto son números en $\{1, 2, 3\}$ se escogen las variables x_1, x_2, x_3 y la biyección es natural. Por ejemplo, el multiconjunto $\{1, 1, 2, 2, 2, 3\}$ queda identificado con $x_1^2 x_2^3 x_3$. La siguiente noción es equivalente a la de multicomplejo en el lenguaje de monomios:

Definición 2.4. Sea A_n el conjunto de los monomios en las variables $\{x_i\}_{i=1}^n$. Un **ideal de orden** C de A_n es un subconjunto de A_n tal que si $m \in C$ y $m' | m$, entonces $m' \in C$. Un ideal de orden es **puro** si todos los monomios maximales en el poset $(C, |)$ tienen el mismo grado.

Es claro que un ideal de orden es el equivalente a un multicomplejo y como en el caso de complejos simpliciales se puede definir un vector $f = (f_{-1}, f_1, \dots, f_n)$, de modo que f_n es el número de monomios en C que tienen grado $n + 1$.

Definición 2.5. Una secuencia finita s es llamada **O -secuencia** si es igual al f -vector de un multicomplejo. Una O -secuencia es llamada **pura** si es igual al f -vector de algún multicomplejo puro.

2.2. Matroides: Independientes, bases y rango

Existen muchas formas diferentes de definir el concepto de matroide. Una ventaja de esto es que una vez que se tiene la estructura, se puede usar cualquiera de las definiciones equivalentes para trabajar con ellas. A continuación se introducirán algunas de las diferentes formas de presentar una matroide.

Definición 2.6. Una **matroide** es una pareja ordenada $M = (E, \mathcal{I})$, donde E es un conjunto finito e \mathcal{I} es una familia de subconjuntos de E llamados *independientes* que satisface los siguientes axiomas:

- (I1) \emptyset es un elemento de \mathcal{I} .
- (I2) Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subset A$, entonces $B \in \mathcal{I}$.
- (I3) Si $A, B \in \mathcal{I}$ y $|A| > |B|$, entonces hay un elemento $a \in A - B$ tal que $B \cup a \in \mathcal{I}$.

Decimos que dos matroides M y M' son isomorfas si existe una función $f : E \rightarrow E'$ que induce una biyección entre \mathcal{I} e \mathcal{I}' .

El primer ejemplo de una matroide viene del álgebra lineal y es la razón por la que el conjunto I recibe su nombre. Sea E es un conjunto finito de vectores en un espacio vectorial sobre un campo \mathbb{F} y sea $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(E)$ tal que $A \subset E$ pertenece a \mathcal{I} si sus elementos son linealmente independientes. La teoría de espacios vectoriales dice que $M = (E, \mathcal{I})$ es una matroide. El siguiente ejemplo muestra explícitamente una matroide obtenida de un conjunto finito de vectores.

Ejemplo 2.7. Sean $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$, $v_4 = (2, 0, 0)$, $v_5 = (0, 1, 2)$, $v_6 = (0, 0, 0)$ y $v_7 = (1, 1, 1)$. Viendo los índices como el conjunto base se tiene que estos vectores inducen la siguiente matroide. $M = (E, \mathcal{I})$, con conjunto base $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y conjunto de independientes

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = & \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{7\}, \\ & \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \\ & \{2, 7\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{4, 5\}, \{4, 7\}, \{5, 7\}, \\ & \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 7\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 5, 7\}, \{2, 3, 4\}, \\ & \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{4, 5, 7\}\} \end{aligned}$$

El vector 0 del caso anterior es un elemento especial de la matroide, pues no pertenece a ninguna base. Estos elementos reciben un nombre especial y son muy importantes en el estudio de invariantes de Tutte-Grothendieck.

Definición 2.8. Un elemento a de una matroide se llama **loop** si es dependiente.

Definición 2.9. Una matroide M se llama **lineal** si existe un conjunto de vectores E' que genera una matroide M' isomorfa a M .

Si E es un conjunto finito de vectores, entonces los independientes maximales son exactamente las bases del espacio generado por E .

Definición 2.10. Dada una matroide $M = (E, \mathcal{I})$, un elemento $B \in \mathcal{I}$ es llamado una **base** si es maximal en el poset (\mathcal{I}, \subseteq) . El conjunto de las bases de M se denota \mathcal{B} .

Lo bueno de esta definición es que se puede recuperar \mathcal{I} si se conoce \mathcal{B} , pues un elemento pertenece a \mathcal{I} si y solo si es un subconjunto de algún elemento de \mathcal{B} . La pregunta natural ahora es que propiedades debe cumplir un conjunto \mathcal{B} para que sea el conjunto de bases de una matroide.

Teorema 2.11. Todas las bases de una matroide tienen la misma cantidad de elementos. En otras palabras, el conjunto \mathcal{I} de independientes es un complejo simplicial puro.

Demostración. Supóngase que A y B son bases con $|A| < |B|$. Por (I3) existe un elemento $b \in B \setminus A$ tal que $A \cup \{b\}$ es independiente, luego A no podía ser base. \square

Las familias de bases se pueden clasificar completamente. Esto da una presentación de una matroide según su conjunto de bases.

Teorema 2.12. Un conjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$ es una familia de bases de una matroide si y solo si

(B1) \mathcal{B} es no vacío.

(B2) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 - B_2$, entonces existe $y \in B_2 - B_1$ tal que $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$

Demostración. \Rightarrow) Sea M una matroide. Es evidente que el conjunto de bases no es vacío, pues \mathcal{I} no es vacío. Sean B_1 y B_2 bases y $x \in B_1 - B_2$. Por 2.11 se tiene que $|B_1 - x| = |B_2| - 1$, luego por (I3) existe un elemento $y \in B_2 - B_1$ tal que $B_1 - x \cup \{y\}$ es independiente y es base por 2.11.

\Leftarrow) Sea \mathcal{I} la familia de subconjuntos A de E que están contenidos en algún elemento de \mathcal{B} . Se probará que $M = (E, \mathcal{I})$ es una matroide. Como $\mathcal{B} \neq \emptyset$, se tiene que $\emptyset \in \mathcal{I}$. Sean A, A' subconjuntos de E tales que $A \subseteq A'$ y $A' \in \mathcal{I}$. Existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $A' \subseteq B$, luego $A \subseteq B$ y así $A \in \mathcal{I}$. Para finalizar, sean A y A' elementos de \mathcal{I} con $|A| < |A'|$ y sean B, B' elementos de \mathcal{B} tales que $A \subseteq B$ y $A' \subseteq B'$. Si B contiene algún elemento a de $A' - A$, entonces $A \cup \{a\} \in \mathcal{I}$. En otro caso todos los elementos de $A' - A$ no pertenecen a B y por lo tanto $B \cap A' = A \cap A'$. Se sigue que:

$$\begin{aligned}
|B - (B' \cup A)| &= |B| - |(B \cap B') \cup (B \cap A)| \\
&= |B| - |B \cap B'| - |A| + |B' \cap A| \\
&> |B'| - |B \cap B'| - |A'| + |A' \cap A| \\
&= |B'| - |B \cap B'| - |A'| + |B \cap A'| \\
&= |B' - (B \cup A')|
\end{aligned}$$

La última desigualdad y (B2) implican es posible remover uno a uno elementos de $B - (B' \cap A)$ y meter elementos de B' de modo que en cada paso el resultado sea una base. La desigualdad dice que en algún momento entra un elemento de A' , pues los elementos de B' que se pueden meter y no están en A' forman el conjunto $B' - (A' \cup B)$. Esto deja un elemento de \mathcal{B} que contiene a A y un elemento a de $A' - A$, y así $A \cup \{a\} \in \mathcal{I}$. \square

El rango de un conjunto de vectores también se puede generalizar para matroides y se obtiene una función de $\mathcal{P}(E)$ que caracteriza la matroide completamente.

Definición 2.13. Dada una matroide $M = (E, \mathcal{I})$ y $U \subset E$, definimos el rango $r(U)$ de U como el mayor tamaño de un independiente contenido en U . Definimos el rango de M como $r(E)$.

Lo siguiente que se hará es caracterizar completamente las funciones de rango. Esta es la tercera presentación de una matroide.

Teorema 2.14. Una función $r : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ es la **función de rango** de una matroide si y solamente si:

(R1) Para todo $U \subseteq E$ se tiene que $0 \leq r(U) \leq |U|$.

(R2) Si $W \subseteq U \subseteq E$ entonces $r(W) \leq r(U)$

(R3) Para toda pareja U, W de subconjuntos de E vale la siguiente desigualdad

$$r(U \cup W) + r(U \cap W) \leq r(U) + r(W)$$

Demostración. \Rightarrow) Sean $M = (E, \mathcal{I})$ una matroide y r su función de rango. $0 \leq r(U) \leq |U|$ para todo $U \subseteq E$, pues $r(U)$ es el tamaño máximo de un independiente subconjunto de U . Si $U \subset W \subseteq E$ se tiene que $r(U) \leq r(W)$ pues cualquier conjunto independiente contenido en U está contenido en W .

Sean U y W subconjuntos de E , sea A un independiente maximal en $U \cap W$ y sea A' un independiente maximal de $U \cup W$ que contiene a A . Sean $A_U = U \cap A'$ y $A_W = W \cap A'$. Se tiene que A_U y A_W son independientes luego $|A_U| \leq r(U)$, $|A_W| \leq r(W)$ y $A_U \cap A_W = A$ por ser un independiente que contiene a A y estar contenido en $U \cap W$. Además $A_U \cup A_W = A'$. La fórmula de inclusión-exclusión implica que $|A'| = |A_U| + |A_W| - |A|$, de donde se obtiene que $r(U \cup W) + r(U \cap W) = |A'| + |A| = |A_U| + |A_W| \leq r(U) + r(W)$.

\Leftarrow) Sea r una función que satisface (R1), (R2) y (R3) y sea $\mathcal{I} = \{A \subseteq E \mid r(A) = |A|\}$. Se probará que $M = (E, \mathcal{I})$ es una matroide. Por (R1) se tiene que $0 \leq r(\emptyset) \leq |\emptyset| = 0$, luego $r(\emptyset) = 0$ y así $\emptyset \in \mathcal{I}$.

Sea $W \in \mathcal{I}$ y sea U un subconjunto de W . Se tiene que $W = U \cup (W - U)$, luego (R3) y (R1) implican la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} |W| &= r(W) + r(\emptyset) \\ &= r(U \cup (W - U)) + r(U \cap (W - U)) \\ &\leq r(U) + r(W - U) \\ &\leq |U| + |W - U| \\ &= |W| \end{aligned}$$

Así que las desigualdades tiene que ser igualdades y de donde $r(U) = |U|$, luego $U \in \mathcal{I}$.

Para probar (I3) sean U y W elementos de \mathcal{I} tales que $|U| < |W|$. (R2) dice que $r(U \cup W) \geq r(W) > r(U)$. Sean $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ los elementos de $(U \cup W) - U = W - U$ y sea k el menor natural tal que $r(U) < r(U \cup \{a_i\}_{i=1}^k)$. Sea $A = U \cup \{a_k\}$ y $B = U \cup \{a_j\}_{j=1}^{k-1}$. Usando (R3) con A y B se tiene que $r(U \cup \{a_j\}_{j=1}^k) + r(U) \leq r(A) + r(B) = r(A) + r(U)$ y así se tiene que

$$\begin{aligned} |U| &< r(U \cup \{a_j\}_{j=1}^k) \\ &\leq r(U \cup \{a_k\}) \\ &\leq |U \cup \{a_k\}| \\ &= |U| + 1 \end{aligned}$$

Así que $r(U \cup \{a_k\}) = |U \cup \{a_k\}|$ de donde $U \cup \{a_k\} \in \mathcal{I}$. □

Ejemplo 2.15. Las bases de la matroide del ejemplo 2.7 son los conjuntos de tamaño 3 (que están enumerados en las últimas dos filas de la descripción de \mathcal{I}) y el rango de la matroide es 3. Se tiene como ejemplo que $r(\{6\}) = 0$, $r(\{1, 2, 4, 6\}) = 2$ y $r(1, 2, 3) = 3$. Otra cosa para destacar es que 6 es un loop.

2.3. Dualidad

En esta sección se presenta una forma de construir una matroide a partir de una antes conocida. Las matroides duales juegan un papel esencial en las técnicas de evaluación del polinomio de Tutte utilizada más adelante.

Teorema 2.16. Sean $M = (E, \mathcal{I})$ una matroide y r su función de rango. La función $r^* : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $r^*(U) = |U| - r(E) + r(E - U)$ es la función de rango de una matroide.

Demostración. Hay que verificar que valen los axiomas (R1), (R2) y (R3). Primero se probará que si $U \subset W$ entonces $|U| - r(U) \leq |W| - r(W)$. Sea $A \subset U$ maximal independiente. Existe un maximal independiente B de W tal que $A \subseteq B$, por (I3) con A y cualquier maximal independiente de W . Es claro que $|U \cup (B - A)| = |U| + |B - A|$ y que $r(U \cup B - A) = r(U) + |B - A| = r(W)$, pues el nuevo conjunto contiene una base y se está extendiendo el rango en uno por cada elemento nuevo. Así que $|U| - r(U) = |U \cup (B - A)| - r(U \cup (B - A)) = |U \cup (B - A)| - r(W) \leq |W| - r(W)$.

(R1) Sea $U \subseteq E$. Por la propiedad anterior se tiene que $0 \leq |E| - r(E) - |E - U| + r(E - U) = |U| - r(E) + r(E - U) = r^*(U)$, pues $E - U \subseteq E$. Además $E - U \subseteq E$, luego $r(E - U) \leq r(E)$ por (R2) para r y así $|U| \geq |U| - r(E) + r(E - U)$.

(R2) Sean $U \subseteq W$ subconjuntos de E . Se tiene que $E - W \subseteq E - U$, luego $r(E - U) - |E - U| \leq r(E - W) - |E - W|$ y así

$$\begin{aligned}
 r^*(U) &= |U| - r(E) + r(E - U) \\
 &= |E| - r(E) + r(E - U) - |E - U| \\
 &\leq |E| - r(E) + r(E - W) - |E - W| \\
 &= |W| - r(E) + r(E - W) \\
 &= r^*(W)
 \end{aligned}$$

(R3) Sean U y W subconjuntos de E . Se tiene que $E - (U \cup W) = (E - U) \cap (E - W)$ y

$E - (U \cup W) = (E - U) \cap (E - W)$, luego (R3) dice que

$$\begin{aligned}
 r^*(U \cup W) + r^*(U \cap W) &= |U \cup W| + |U \cap W| - 2r(E) \\
 &\quad + r(E - (U \cup W)) + r(E - (U \cap W)) \\
 &= |U| + |W| - 2r(E) + \\
 &\quad r((E - U) \cap (E - W)) + r((E - U) \cup (E - W)) \\
 &\leq |U| + |W| - 2r(E) + r(E - U) + r(E - W) \\
 &= r^*(U) + r^*(W)
 \end{aligned}$$

□

Definición 2.17. La matroide M^* cuya función de rango es r^* se llama la **matroide dual** de M .

Es posible describir la matroide dual en términos de la base \mathcal{B} de M .

Teorema 2.18. Sea $M = (E, \mathcal{I})$ una matroide. El conjunto $\mathcal{B}^* = \{E - B \mid B \in \mathcal{B}\}$ es el conjunto de bases de M^* .

Demostración. Un subconjunto B de E es base de M^* si y solo si $r^*(B) = |B|$ y $r^*(B) = r^*(E)$. Se tiene que $r^*(E) = |E| - r(E)$. Usando la definición de r^* se tiene que las condiciones anteriores son equivalentes respectivamente a:

1. $r(E) = r(E - B)$, luego $E - B$ contiene una base de M .
2. $|E| = |B| + r(E - B)$, luego $r(E - B) = |E - B|$ y así $E - B$ es independiente en M .

Las dos condiciones anteriores son equivalentes a decir que $E - B$ es una base de M , pues es se probó que es un independiente de M con rango máximo. □

En este momento se pueden apreciar las ventajas de las equivalencias. La descripción de la matroide dual es sencilla en términos de la función de rango y de las bases, pero la descripción de los independientes es complicada sin recurrir al concepto de base.

Un corolario inmediato de 2.18 es que $(M^*)^* = M$ para cualquier matroide M . Los objetos definidos de la matroide dual M^* juegan un papel importante en el estudio de M y

se denotan con el prefijo **co** antes del nombre usual. Así por ejemplo, una **cobase** de M es una base de M^* y **coloop** de M es un loop de M^* . Vale la pena notar que los coloops tienen una descripción combinatorica sencilla: son los elementos que pertenecen a todas las bases.

Para concluir la sección se presentará una construcción que muestra que la matroide dual de una matroide lineal es lineal.

Teorema 2.19. Sea \mathbb{F} un campo y sea E un conjunto finito de vectores en un espacio vectorial sobre \mathbb{F} . La matroide M_E^* es lineal.

Demostración. Sea $r = r(E)$. Si $r(E) = |E|$ la matroide es trivial y el resultado es obvio, pues queda la matroide con $\mathcal{I} = \{\emptyset\}$ que se realiza con el vector $\mathbf{0}$. De ahora en adelante el número de vectores en E es mayor que r . Se tiene entonces que $\text{span}(E)$ es isomorfo a \mathbb{F}^r y como el isomorfismo preserva independencia lineal se puede ver M_E como el espacio columna de una matriz. Las operaciones elementales de matrices preservan también independencia, luego se puede suponer que la matriz (que tiene rango máximo) es de $r \times n$ y de la forma:

$$\begin{aligned} A &= \left(\begin{array}{c|ccc} I_r & & D \\ \hline e_1 & e_2 & \dots & e_r & v_1 & \dots & v_{n-r} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} | & | & & | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \dots & e_r & v_1 & \dots & v_{n-r} \\ | & | & & | & | & & | \end{array} \right) \end{aligned}$$

Se probará que la matroide generada por las columnas de la siguiente matriz es isomorfa a la matroide dual de M_E .

$$B = \left(\begin{array}{c|ccc} & & & & & & \\ D^T & & & I_{n-r} \\ \hline & & & & & & \end{array} \right)$$

Por 2.18 basta mostrar que un conjunto C de r columnas de A es linealmente independiente si y solo si las $n - r$ columnas que corresponden al complemento de C en B son linealmente independientes, pues las bases de A tienen r vectores y las de B tienen $n - r$.

Intercambiando filas y columnas (en A y en B) se puede asumir que los r vectores son columnas consecutivas de A que son $e_{r-j+1}, e_{r-j}, \dots, e_r, v_1, \dots, v_{r-j}$ para algún j entre 0 y r .

Pensando en estudiar las r columnas no correspondientes a estos vectores en B , se reescribe A como

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} I_{r-j} & \mathbf{0} & D_1 & D_2 \\ \hline - & - & - & - \\ \hline \mathbf{0} & I_j & D_3 & D_4 \end{array} \right)$$

Con las columnas de $\begin{pmatrix} D_1 \\ D_3 \end{pmatrix}$ iguales av_1, \dots, v_{r-j} . Así que la matriz

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & D_1 \\ \hline - & - \\ \hline I_j & D_3 \end{array} \right)$$

es invertible y equivalente por columnas a la matriz que se obtiene al reemplazar D_3 por $\mathbf{0}$. Por lo tanto se tiene que $R(D_1) = r - R(I_j) = r - j$. Además B se puede escribir en términos de D_1, D_2, D_3 y D_4 de la siguiente manera;

$$B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} D_1^T & D_3^T & I_{r-j} & \mathbf{0} \\ \hline - & - & - & - \\ \hline D_2^T & D_4^T & \mathbf{0} & I_{n-2r+j} \end{array} \right)$$

El rango de D_1^T es $r - j$, luego el rango de la matriz

$$\left(\begin{array}{c|c} D_1 & \mathbf{0} \\ \hline - & - \\ \hline D_2 & I_{n-2r+j} \end{array} \right)$$

esta dado por $R(D_1^T) + R(I_{n-2r+j}) = R(D_1) + R(I_{n-2r+j}) = (r-j) + (n-2r+j) = n-j$ pues la matriz es equivalente por columnas a la matriz que se obtiene al reemplazar D_2 por $\mathbf{0}$, luego el rango de esta matriz es $R(D_1^T) + R(I_{n-2r+j}) = R(D_1) + R(I_{n-2r+j}) = (r-j) + (n-2r+j) = n-j$ como se quería. \square

Ejemplo 2.20. En el ejemplo 2.7, la matroide está generada por las columnas de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es equivalente por filas y columnas a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego la matroide dual a la del ejemplo 2.7 es la generada por las columnas de

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las bases de esta matroide están dadas por

$$\mathcal{B}^* = \{\{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 4, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 2, 6, 7\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{1, 3, 5, 6\}, \{1, 3, 6, 7\}, \\ \{1, 4, 6, 7\}, \{2, 3, 4, 6\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{2, 4, 6, 7\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{3, 4, 6, 7\}, \{4, 5, 6, 7\}\}$$

Tomando los complementos de estos conjuntos se obtiene exactamente el conjunto de elementos de tamaño 3 del conjunto \mathcal{I} de 2.7.

2.4. El polinomio de Tutte

En esta sección R es un anillo conmutativo con unidad. Dado que las matroides están basadas en conjuntos finitos, es natural pensar que hay muchas propiedades que se pueden probar usando inducción en el número de elementos de la matroide. Al tratar de hacer esto salen muchas recurrencias que tienen formas similares y motivan las siguientes definiciones.

Definición 2.21. (Supresión) Sean $M = (E, \mathcal{I})$ una matroide y e un elemento de E . La **supresión** de e , denotada por $M \setminus e$ es la matroide con conjunto $E - \{e\}$, y cuyos independientes son los independientes de M que no contienen a e .

Definición 2.22. (Contracción) Sea $M = (E, \mathcal{I})$ una matroide y sea e un elemento de E . La **contracción** de e , denotada por M/e , es la matroide dual de la supresión de e en M^* , es decir $M/e = (M^* \setminus e)^*$.

Nótese que si $|E| = 1$, hay dos posibilidades para M . Que \mathcal{I} tenga o no a $\{1\}$.

Definición 2.23. Sea $M_{loop} = ([1], \{\emptyset\})$ la matroide de un elemento que solo tiene un loop y sea $M_{coloop} = ([1], \{\emptyset, \{1\}\})$ la matroide con un elemento que tiene un coloop. Es claro que $M_{loop}^* = M_{coloop}$.

Definición 2.24. Una **invariante de Tutte-Grothendieck (o T-G)** es una función f de la clase de matroides a R , que satisface las siguientes condiciones:

$$(TG1) \quad f(M_1) = f(M_2) \text{ si } M_1 \cong M_2$$

$$(TG2) \quad f(M) = f(M \setminus e) + f(M/e) \text{ si } e \text{ no es un loop ni un coloop.}$$

$$(TG3) \quad f(M) = f(e)f(M \setminus e) \text{ si } e \text{ es un loop o un coloop}^1$$

Ejemplo 2.25. Sea $f : \text{Matroides} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $f(M) = |B_M|$, es decir, $f(M)$ es la función que cuenta bases. Dos matroides isomorfas tienen la misma cantidad de bases, luego (TG1) vale. Sea B una base de M y $e \in E$ un elemento que no es loop ni coloop. Si $e \notin B$ entonces B es una base de $M \setminus e$. Si $e \in B$ entonces $e \notin E - B$ que es una base de M^* , luego es una base de $M^* \setminus e$ y así $(E - e) - (E - B) = B - e$ es una base de $(M^* \setminus e)^* = M/e$. e no es coloop, luego hay una base de M que no contiene a e y así $M \setminus e$ tiene el mismo rango que M . Así que si B es una base de $M \setminus e$, entonces B es base de M , luego $(E - e) - B = E - (B \cup \{e\})$ es base de $M^* \setminus e$ y como $e \notin E - (B \cup \{e\})$, se tiene una base de M^* . Por lo tanto $B \cup \{e\}$ es base de M . De las observaciones anteriores se tiene que hay $|B_{M \setminus e}|$ bases de M que no contienen a e y $|B_{M/e}|$ bases que contienen a e , y así f satisface (TG2). Ahora si e es un loop o un coloop de M la cantidad de bases no cambia, pues todas tienen o no a e , así que $f(M) = f(M \setminus e)$. Se tiene que $f(M_{loop}) = f(M_{coloop}) = 1$, luego vale (TG3). Se concluye que f es una invariante T-G.

Corolario 2.26. Las bases de la matroide M/e son los conjuntos que resultan de eliminar e de las bases de M que lo contienen.

Existen varios ejemplos de objetos relacionados a la matroide que son invariantes de Tutte-Grothendieck. Otros ejemplos clásicos vienen de la cantidad de independientes o la cantidad de regiones en que es dividido un espacio vectorial por un arreglo de hiperplanos en posición general. Más adelante se verán ejemplos más sofisticados en los que se reemplaza R por algún anillo diferente a \mathbb{Z} .

¹La notación $f(e)$ se refiere a $f(M_{loop})$ o $f(M_{coloop})$ según sea el caso.

De la forma como se construyeron las invariantes es de esperarse que los valores de estas dependan sólo de los valores de unas pocas matroides. El siguiente teorema muestra que la intuición no falla en este caso y da una caracterización muy útil de las invariantes T-G. Empezamos por mostrar un polinomio en dos variables que es una invariante T-G.

Lema 2.27. La función $T : \text{Matroides} \rightarrow \mathbb{Z}[x, y]$ tal que a $M = (E, \mathcal{I})$ le asigna el polinomio:

$$T(M; x, y) := \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(A)} (y-1)^{|A|-r(A)}$$

es una invariante T-G.

Demostración. Basta verificar que valen las tres condiciones de las invariantes T-G.

- (TG1) La función de rango se preserva bajo isomorfismo de matroides, luego el polinomio es igual para matroides isomorfas.
- (TG2) Sea e un elemento de E que no es loop ni coloop y sean u y v las funciones de rango de $M \setminus e$ y M/e respectivamente. Se tiene que u es la restricción de r a E y que $v(A) = r(A \cup \{e\}) - 1$ para todo $A \subseteq E - e$, pues como e es independiente, se puede extender a un independiente maximal de $A \cup \{e\}$, que tiene rango uno más que A en M/e por 2.26. De lo anterior se sigue que:

$$\begin{aligned} T(M \setminus e; x, y) + T(M/e; x, y) &= \sum_{A \subseteq E-e} (x-1)^{u(E-e)-u(A)} (y-1)^{|A|-u(A)} \\ &\quad + \sum_{A \subseteq E-e} (x-1)^{v(E-e)-v(A)} (y-1)^{|A|-v(A)} \\ &= \sum_{A \subseteq E-e} (x-1)^{r(E)-r(A)} (y-1)^{|A|-r(A)} \\ &\quad + \sum_{A \subseteq E-e} (x-1)^{(r(E)-1)+-(r(A \cup \{e\})-1)} (y-1)^{|A|-(r(A \cup \{e\})-1)} \\ &= \sum_{A \subseteq E-e} (x-1)^{r(E)-r(A)} (y-1)^{|A|-r(A)} \\ &\quad + \sum_{A \subseteq E, e \in A} (x-1)^{r(E)-r(A)} (y-1)^{|A|-r(A)} \\ &= \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(A)} (y-1)^{|A|-r(A)} \\ &= T(M; x, y) \end{aligned}$$

(TG3) Evaluando en M_{loop} y M_{coloop} se obtiene que:

$$\begin{aligned} T(M_{loop}; x, y) &= (x-1)^{r([1]) - r(\emptyset)} (y-1)^{|\emptyset| - r(\emptyset)} + (x-1)^{r([1]) - r([1])} (y-1)^{|[1]| - r([1])} \\ &= 1 + (y-1) \\ &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(M_{coloop}; x, y) &= (x-1)^{r([1]) - r(\emptyset)} (y-1)^{|\emptyset| - r(\emptyset)} + (x-1)^{r([1]) - r([1])} (y-1)^{|[1]| - r([1])} \\ &= (x-1) + 1 \\ &= x \end{aligned}$$

Ahora sea e un loop de la matroide. Se tiene que

$$\begin{aligned} T(e; x, y)T(M \setminus e; x, y) &= T(M_{loop}; x, y)T(M \setminus e; x, y) \\ &= y \sum_{A \subseteq E - e} (x-1)^{u(E-e) - u(A)} (y-1)^{|A| - u(A)} \\ &= (y-1) \left(\sum_{A \subseteq E - e} (x-1)^{r(E) - r(A)} (y-1)^{|A| - r(A)} \right) \\ &\quad + \sum_{A \subseteq E - e} (x-1)^{r(E-e) - r(A)} (y-1)^{|A| - r(A)} \\ &= \sum_{A \subseteq E - e} (x-1)^{r(E) - r(A \cup \{e\})} (y-1)^{|A| + 1 - r(A \cup e)} \\ &\quad + \sum_{A \subseteq E - e} (x-1)^{r(E) - r(A)} (y-1)^{|A| - r(A)} \\ &= \sum_{A \subseteq E, e \in A} (x-1)^{r(E) - r(A)} (y-1)^{|A| - r(A)} \\ &\quad + \sum_{A \subseteq E - e} (x-1)^{r(E) - r(A)} (y-1)^{|A| - r(A)} \\ &= \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{r(E) - r(A)} (y-1)^{|A| - r(A)} \\ &= T(M; x, y) \end{aligned}$$

Si e es un coloop se tiene que:

$$\begin{aligned}
T(e; x, y)T(M \setminus e; x, y) &= T(M_{coloop}; x, y)T(M/e; x, y) \\
&= x \sum_{A \subseteq E-e} (x-1)^{u(E-e)-u(A)} (y-1)^{|A|-u(A)} \\
&= (x-1) \left(\sum_{A \subseteq E-e} (x-1)^{r(E-e)-r(A)} (y-1)^{|A|-r(A)} \right) \\
&\quad + \sum_{A \subseteq E-e} (x-1)^{r(E-e)-r(A)} (y-1)^{|A|-r(A)} \\
&= \sum_{A \subseteq E-e} (x-1)^{r(E)-r(A)} (y-1)^{|A|-r(A)} \\
&\quad + \sum_{A \subseteq E, e \in A} (x-1)^{r(E)-r(A)} (y-1)^{|A|-r(A)} \\
&= \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(A)} (y-1)^{|A|-r(A)} \\
&= T(M; x, y)
\end{aligned}$$

□

El polinomio anterior es importante pues es una invariante universal en el sentido en que ese explica en el siguiente teorema.

Teorema 2.28. Existe una única invariante T de Tutte-Grothendieck al anillo de polinomios $\mathbb{Z}[x, y]$ tal que $T(M_{coloop}; x, y) = x$ y $T(M_{loop}; x, y) = y$. Además, si f es una invariante T-G, entonces se cumple que $f(M) = T(M; f(M_{coloop}), f(M_{loop}))$.

Demostración. El teorema 2.27 garantiza la existencia de T . Nótese que basta probar la caracterización de las invariantes T-G para tener la unicidad, pues esta dice que toda invariante es una evaluación de T en los valores de M_{loop} y M_{coloop} . Sea f una invariante T-G. La prueba es por inducción en $|E(M)|$. Si $|E(M)| = 1$ entonces M es congruente a M_{loop} ó a M_{coloop} , luego el resultado se tiene por 2.27, por la evaluación. Ahora suponga que el resultado vale para todas las matroides con $E(M) < n$. Sea M una matroide con $E(M) = n \geq 2$ y sea

$e \in E(M)$. Si e no es un loop ni un coloop, se tiene por la hipótesis de inducción y 2.27 que

$$\begin{aligned} f(M) &= f(M \setminus e) + f(M/e) \\ &= T(M \setminus e, f(M_{\text{coloop}}), f(M_{\text{loop}})) + T(M/e; f(M_{\text{coloop}}), f(M_{\text{loop}})) \\ &= T(M; f(M_{\text{coloop}}), f(M_{\text{loop}})) \end{aligned}$$

Si e es un loop o un coloop se tiene otra vez por la hipótesis de inducción y 2.27 que:

$$\begin{aligned} f(M) &= f(e)f(M \setminus e) \\ &= T(e; f(M_{\text{coloop}}), f(M_{\text{loop}}))T(M \setminus e; f(M_{\text{coloop}}), f(M_{\text{loop}})) \\ &= T(M, f(M_{\text{coloop}}), f(M_{\text{loop}})) \end{aligned}$$

Concluyendo así el paso inductivo (pues $|E(M \setminus e)| = |E(M/e)| = E(M) - 1$). \square

El polinomio de 2.27 es muy importante y muchas de las demostraciones que hay en teoría de matroides se basan en evaluar este polinomio en valores adecuados, o probar que un objeto asociado a la matroide resulta ser una evaluación del polinomio. Es por eso que recibe un nombre.

Definición 2.29. El polinomio $T(M; x, y)$ se llama el **polinomio de Tutte** de M .

Recordando la fórmula 2.16 y el teorema 2.27, se tiene la siguiente relación entre los polinomios de M y M^*

Teorema 2.30. Sea M una matroide. El polinomio de Tutte de M^* se puede calcular a partir del polinomio de Tutte de M mediante la siguiente ecuación $T(M^*; x, y) = T(M; y, x)$.

Demostración. Por 2.16 se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} T(M^*; x, y) &= \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{r^*(E)-r^*(A)} (y-1)^{|A|-r^*(A)} \\ &= \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{(|E|-r(E))- (|A|-r(E)+r(E-A))} (y-1)^{|A|- (|A|-r(E)+r(E-A))} \\ &= \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{|E-A|-r(E-A)} (y-1)^{r(E)-r(E-A)} \\ &= \sum_{A \subseteq E} (y-1)^{r(E)-r(A)} (x-1)^{|A|-r(A)} \\ &= T(M; y, x) \end{aligned}$$

□

Para finalizar la sección se considera una última invariante de Tutte que será muy útil en la siguiente sección. Esta invariante es el polinomio f que se definió en la sección de complejos simpliciales.

Teorema 2.31. El mapa $f : \text{Matroides} \rightarrow \mathbb{Z}[x]$ que a la matroide M le asocia el polinomio $f_M(x) = \sum_{i=0}^{r(M)} f_{i-1} x^{r(M)-i} = \sum_{A \in \mathcal{I}} x^{r(M)-|A|}$ es una invariante T-G.² Más aún, $f_M(x) = T(M; x+1, 1)$.

Demostración. Se probarán los tres axiomas directamente.

(TG1) Dos matroides isomorfas tienen el mismo vector f , luego este axioma se cumple.

(TG2) Sea M una matroide y sea e un elemento que no es ni loop ni coloop. Esto quiere decir que existen bases que contienen a e y bases que no contienen. Sea $A \in \mathcal{I}$ y supóngase que $e \notin A$. Se tiene que $A \subseteq B$ para algún $B \in \mathcal{B}$. Si $e \notin B$ entonces A es independiente en $M \setminus e$. Si $e \in B$, sea B' una base cualquiera que no contiene a B . Por (B2) se tiene que existe $e' \in B'$ tal que $(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ es una base. Esta base contiene a A , pues $e \notin A$, de donde se tiene que A es independiente en $M \setminus e$. Esto muestra que las caras de M que no contienen a e están en biyección natural con las caras de $M \setminus e$ y la biyección preserva la dimensión de las caras.

Ahora supóngase que $e \in A$. Entonces $A - e$ es un elemento independiente de M/e . Además, a cualquier independiente de M/e se le puede agregar e y obtener un independiente de M . Así que los independientes de M que contienen a e están en biyección natural con los independientes de M/e y el rango en M es uno más que el rango en M/e en la biyección.

Se tiene que $r(M) = r(M \setminus e) = r(M/e) + 1$, luego:

$$\begin{aligned} f_M(x) &= \sum_{A \in \mathcal{I}(M \setminus e)} x^{r(M)-|A|} + \sum_{A \in \mathcal{I}(M/e)} x^{r(M)-|A \cup \{e\}|} \\ &= \sum_{A \in \mathcal{I}(M \setminus e)} x^{r(M \setminus e)-|A|} + \sum_{A \in \mathcal{I}(M/e)} x^{(r(M/e)+1)-(|A|+1)} \\ &= f_{M \setminus e}(x) + f_{M/e}(x) \end{aligned}$$

²Nótese que el polinomio f de esta definición coincide con el polinomio f del complejo simplicial $\Delta(M)$ definido por M , según la definición de la sección de complejos.

(TG3) Nótese que M_{coloop} tiene un elemento de rango cero y uno de rango uno, luego $f_{M_{coloop}}(x) = x + 1$ y M_{loop} solo tiene un independiente de rango 0, luego $f_{M_{loop}}(x) = 1$.

Si e es un coloop se tiene que los independientes de \mathcal{I} que tienen a e están en biyección con los elementos de \mathcal{I} que no contienen a e (igual que el caso de la contracción de antes), luego se tiene que

$$\begin{aligned}
 f_M(x) &= \sum_{A \in \mathcal{I}, e \notin A} x^{r(M)-|A|} + x^{r(M)-|A \cup \{e\}|} \\
 &= \sum_{A \in \mathcal{I}, e \notin A} x^{r(M \setminus e)-|A|+1} + x^{r(M \setminus e)-|A|} \\
 &= (x + 1) \sum_{A \in \mathcal{I}, e \notin A} x^{r(M \setminus e)-|A|} \\
 &= f_{M_{coloop}}(x) f_{M \setminus e}(x)
 \end{aligned}$$

Si e es un loop, se tiene que los independientes de M y $M \setminus e$ son los mismos, luego los vectores f son los mismos y además ambas matroides tienen el mismo rango. Así que

$$f_M(x) = f_{M \setminus e}(x) = f_{M_{loop}}(x) f_{M \setminus e}(x)$$

Para finalizar basta aplicar 2.28 a la invariante para obtener que

$$f_M(x) = T(M; f_{M_{coloop}}(x), f_{M_{loop}}(x)) = T(M; x + 1, 1)$$

□

2.5. Complejos descascarables y h -vectores

En esta sección se presentará la teoría de complejos simpliciales descascarables. Esta teoría se puede extender a complejos de polítopos, pero para los propósitos de este trabajo no es necesario tanta generalidad. Sin embargo vale la pena mencionar que gracias a esta teoría se puede demostrar la característica de Euler para polítopos de dimensión alta de manera combinatoria. El nombre también viene de la teoría de polítopos, pues se puede imaginar el polítopo como una cáscara que se pega bien y permite bajar la dimensión del polítopo en uno para hacer cuentas. En otras palabras, un descascaramiento es una propiedad muy útil de un complejo, que ayuda a la hora de hacer inducción.

Informalmente, un descascaramiento de un complejo simplicial puro es un orden de sus caras maximales de modo que la intersección de una cara maximal, con la union de las caras maximales anteriores se comporta bien. De este modo se puede hacer inducción en el número de caras maximales.

Definición 2.32. Un **descascaramiento** de un complejo simplicial puro Δ es un orden de las caras maximales F_1, F_2, \dots, F_t tal que para toda pareja $1 \leq i < j \leq t$ existen $x \in F_j$ y $k < j$ tales que $F_i \cap F_j \subseteq F_j \cap F_k = F_j - x$. Un complejo es **descascarable** si tiene un descascaramiento.

Ejemplo 2.33. Considere el complejo $\Delta = ([4], E)$ donde E es el subconjunto de $2^{[4]}$ con elementos de cardinalidad menor o igual a dos. Entonces el orden

$$\{1, 2\} < \{1, 3\} < \{1, 4\} < \{2, 3\} < \{2, 4\} < \{3, 4\}$$

es un descascaramiento de Δ . Es decir que Δ es descascarable. Nótese que el orden

$$\{1, 2\} < \{3, 4\} < \{1, 3\} < \{1, 4\} < \{2, 3\} < \{2, 4\}$$

no es un descascaramiento de Δ pues $\{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \emptyset$ y la definición de descascaramiento implica que $|F_1 \cap F_2| = |F_2| - 1$.

Considere ahora el complejo $\Delta' = ([4], E')$ donde los maximales de E' son $\{1, 2\}$ y $\{3, 4\}$. Se tiene que este complejo no es descascarable por la misma razón que el orden anterior no lo era.

De ahora en adelante Δ es un complejo descascarable y F_1, \dots, F_t es un descascaramiento. Para $1 \leq i \leq t$ sea Δ_i el complejo generado por F_1, \dots, F_i en $F_1 \cup \dots \cup F_i$. La razón por la que se tiene una buena estructura para hacer inducción es que se puede determinar $\Delta_{s+1} - \Delta_s$ explícitamente de manera sencilla. Por la definición de descascaramiento se tiene que los elementos maximales de $\Delta_i \cap \mathcal{P}(F_{i+1})$ tienen todos tamaño $|F_{i+1}| - 1$.

Definición 2.34. Se define \mathcal{R}_j el conjunto de los complementos de las caras maximales de $\Delta_j \cap \mathcal{P}(F_{j+1})$, escribiendo como conjuntos se tiene que $\mathcal{R}_j = \{x \in F_j \mid F_j - x \in \Delta_{j-1}\}$. Se define también $[\mathcal{R}_j, F_j]$ como el intervalo de conjuntos que contienen a \mathcal{R}_j y están contenidos en F_j , es decir, $[\mathcal{R}_j, F_j] = \{G \subseteq F_j \mid \mathcal{R}_j \subseteq G\}$.

Lema 2.35. Para un complejo simplicial descascarable $\Delta = (E, I)$, se cumple que $\Delta_{j+1} - \Delta_j = [\mathcal{R}_{j+1}, F_{j+1}]$. Esto quiere decir que el conjunto $\{[\mathcal{R}_j, F_j] \mid 1 \leq j \leq t\}$ es una partición de I .

Demostración. \subseteq : Sea $G \in \Delta_{j+1} - \Delta_j$. G es subconjunto de alguna cara maximal de Δ_{j+1} que no es maximal de Δ_j , luego $G \subseteq F_{j+1}$. Para la otra parte supóngase que si $x \in \mathcal{R}_{j+1}$ y $x \notin G$, entonces $G \subseteq F_{j+1} - x \in \Delta_j$ por definición de \mathcal{R}_{j+1} , pero como Δ_j es un complejo se tiene que $G \in \Delta_j$, que es una contradicción pues $\Delta_j \cap (\Delta_{j+1} - \Delta_j) = \emptyset$. Así que $G \in [\mathcal{R}_{j+1}, \Delta_{j+1}]$

\supseteq : Sea $G \in [\mathcal{R}_{j+1}, \Delta_{j+1}]$. Se tiene que $G \subseteq F_{j+1}$, luego $G \in \Delta_{j+1}$. Si $G \in \Delta_j$ entonces $\mathcal{R}_{j+1} \in \Delta_j$, pues Δ_j es un complejo. Esto último implica que $\mathcal{R}_{j+1} \subseteq F_i$ para algún $i \leq j$, luego $\mathcal{R}_{j+1} \subseteq F_i \cap F_{j+1} \subseteq F_{j+1} \cap F_k = F_{j+1} - x$ para algún $k \leq j$ y $x \in F_j$, pues F_1, \dots, F_d es un descascaramiento de Δ . Esto último implica dos cosas. Por un lado $x \notin \mathcal{R}_{j+1}$ pues $x \notin F_{j+1} - x$. Por otro $x \in \mathcal{R}_{j+1}$. Así se obtiene una contradicción, luego $\mathcal{R}_{j+1} \notin \Delta_j$ y así $G \notin \Delta_j$. Se sigue que $G \in \Delta_{j+1} - \Delta_j$. \square

Corolario 2.36. Si d es la dimensión de Δ entonces

$$f_k = \sum_{j=1}^t \binom{d+1 - |\mathcal{R}_j|}{k+1 - |\mathcal{R}_j|}$$

Demostración. Por 2.35 cada cara está en un intervalo $[\mathcal{R}_j, F_j]$. Toda cara de tamaño $k+1$ de un intervalo de estos tiene todos los elementos de \mathcal{R}_j fijos, luego hay $d+1 - |\mathcal{R}_j|$ opciones para los $k+1 - |\mathcal{R}_j|$ elementos que faltan. Esto quiere decir que hay $\binom{d+1 - |\mathcal{R}_j|}{k+1 - |\mathcal{R}_j|}$ elementos de Δ de tamaño $k+1$ en el intervalo $[\mathcal{R}_j, F_j]$ y el resultado se obtiene al sumar sobre la partición. \square

Si la dimensión de Δ es d se tiene que $|F_j - \mathcal{R}_j| \leq d+1$ con igualdad si $\mathcal{R}_j = 0$. En particular se tiene la igualdad cuando $j = 0$.

Definición 2.37. Se define el h -polinomio de un complejo Δ como

$$h_{\Delta}(x) = \sum_{j=1}^t x^{|F_j - \mathcal{R}_j|}$$

Este polinomio tiene grado $d+1$ y se puede escribir como

$$h_{\Delta}(x) = \sum_{j=0}^{d+1} h_j x^{d+1-j}$$

El vector $(h_0, h_1, \dots, h_{d+1})$ se llama el h -vector de Δ .

Nótese que la definición anterior parece depender del descascaramiento de Δ , es decir, para que sea una definición canónica es necesario probar que no depende de la escogencia del descascaramiento.

Lema 2.38. El h -vector se puede obtener en función de las entradas del f -vector. Más específicamente se tiene que:

$$(1) \quad h_{\Delta}(x+1) = f_{\Delta}(x)$$

$$(2) \quad h_i = \sum_{k=i}^{d+1} (-1)^{k-1} \binom{d+1-k}{k-i} f_k$$

En otras palabras, el h -vector es independiente del descascaramiento.

Demostración. La definición del vector h y 2.36 implican lo siguiente:

$$\begin{aligned} h_{\Delta}(x+1) &= \sum_{j=1}^t (x+1)^{d+1-|\mathcal{R}_j|} \\ &= \sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^{d+1-|\mathcal{R}_j|} \binom{d+1-|\mathcal{R}_j|}{i} x^i \\ &= \sum_{i=0}^{d+1} \sum_{j=1}^t \binom{d+1-|\mathcal{R}_j|}{i} x^i \\ &= \sum_{i=0}^{d+1} \sum_{j=1}^t \binom{d+1-|\mathcal{R}_j|}{d+1-i-|\mathcal{R}_j|} x^i \\ &= \sum_{i=0}^{d+1} f_{d-i} x^i \\ &= f_{\Delta}(x) \end{aligned}$$

Luego (1) vale. Por (1) se tiene que $h_\Delta(x) = f_\Delta(x - 1)$ así que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{d+1} h_i x^{d+1-i} &= h_\Delta(x) \\
&= f_\Delta(x - 1) \\
&= \sum_{j=0}^{d+1} f_{j-1} (x - 1)^{d+1-j} \\
&= \sum_{j=0}^{d+1} \sum_{i=0}^{d+1-j} f_j \binom{d+1-j}{i} (-1)^i x^{d+1-j-i} \\
&= \sum_{i=0}^{d+1} \left(\sum_{k=i}^{d+1} (-1)^{k-1} \binom{d+1-k}{k-i} f_k \right) x^{d+1-i}
\end{aligned}$$

Comparando coeficientes se obtiene (2).

□

Este último lema tiene una implicación interesante. El h -vector depende de las coordenadas del f -vector, luego se puede generalizar su construcción a complejos simpliciales que no son descascarables. También queda claro que la suma que define el h -vector es no negativa si el complejo es descascarable.

Una cosa interesante de la descascarabilidad es que a partir de esta propiedad se pueden caracterizar las matroides completamente. Recordando que los conjuntos independientes de una matroide forman un complejo simplicial puro, tiene sentido preguntarse por los descascaramientos Δ .

Definición 2.39. Sea A un conjunto y $<$ una relación de orden total sobre A . Entonces $<$ induce un orden natural sobre $\binom{A}{d}$ de la siguiente manera: sean B y C elementos de $\binom{A}{d}$ y sean b y c los menores elementos de $B - C$ y $C - B$ respectivamente. El orden de B y C es igual que el orden de b y c . Este orden se llama el orden **lexicográfico** inducido por $<$.

Si M es una matroide y $<$ es un orden total en E , entonces se tiene un orden lexicográfico para las bases de M . La siguiente es una caracterización de las matroides según las propiedades de descascarabilidad.

Teorema 2.40. Un complejo simplicial puro $\Delta = (E, I)$ es una matroide si y solo si para todo orden $<$ del conjunto base E , el orden lexicográfico inducido por $<$ en los elementos maximales de Δ es un descascaramiento de Δ .

Demostración. \Rightarrow) Suponga que Δ es una matroide y sea $<$ un orden total de E . Sean $A < C$ elementos maximales de Δ y sean $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ los elementos de $A - C$ y sean c_1, c_2, \dots, c_k los elementos de $C - A$. Usando el axioma (B2) se pueden eliminar uno a uno los elementos a_k, \dots, a_2 y poniendo elementos de $C - A$ para obtener un maximal B , de modo que la cadena de conjuntos formados en cada paso sean maximales de Δ . $B - C = \{a_1\}$ y $C - B \subseteq C - A$, luego el elemento de $C - B$ es mayor que a_1 y así $B < C$. Entonces $A \cap C \subseteq B \cap C = C - x$ donde x es el elemento de $C - B$ y así se tiene que el orden de las caras es un descascaramiento.

\Leftarrow) Suponga que Δ es un complejo que no es una matroide. Cualquier complejo satisface (I1) e (I2), luego (I3) falla. Esto quiere decir que una pareja de conjuntos A y B con $|A| < |B|$ tal que para todo $b \in B - A$ el conjunto $A \cup \{b\} \notin \Delta$. Sea $U = A \cup B$ y sea Δ_U el complejo inducido por Δ en U , es decir, los elementos de Δ_U son los elementos de Δ que son subconjuntos de U . Es claro que $A, B \in \Delta_U$ y que A es maximal en Δ_U (pues los elementos de $U - A$ pertenecen a B). Se sigue que Δ_U es un complejo no puro. Ahora sea F una cara maximal de Δ_U con tamaño mínimo y sea G otra cara maximal de Δ_U que tiene más elementos que F y tal que $|F \cap G|$ es máximo. Sea $<$ un orden tal que los elementos de $F - G$ son los menores, después van los elementos de G y el resto de elementos son más grandes. Sea \tilde{F} la menor cara de Δ que contiene a G y sea \tilde{F} una cara de Δ que contiene a F . Como F y G son maximales en Δ_U se tiene que $\tilde{F} \cap U = F$ y $\tilde{G} \cap U = G$. Por la construcción del orden se tiene que $\tilde{F} < \tilde{G}$. Si $<$ induce un descascaramiento, entonces existe un $H \in \Delta$ con $H < \tilde{G}$ tal que $\tilde{F} \cap \tilde{G} \subseteq \tilde{G} \cap H = \tilde{G} - g$. Sea h el elemento de $H - \tilde{G}$. Se tiene que $h \in F$ pues los elementos menores que los de G son exactamente los de F . Ahora si $g \notin G$ se tiene que $G \cup \{h\} \subseteq H$, luego $G \cup \{h\} \in \Delta_U$, contradiciendo la maximalidad de G . Si $g \in G$, es claro que $g \notin F$, luego $(G - g) \cup \{h\} \in \Delta_U$ es un conjunto con tamaño igual a G y $|F \cap (G - g \cup \{h\})| = |F \cap G| + 1$, contradiciendo la maximalidad de $|F \cap G|$ cuando G varía entre los elementos maximales de Δ_U mas grandes que F . \square

El teorema anterior dice en particular que toda matroide es un complejo descascarable, de donde se obtiene que el vector h_M asociado al complejo de una matroide M tiene entradas no negativas.

La relación entre los vectores f y h tiene una consecuencia interesante en el caso en que el

complejo viene de una matroide. El teorema 2.31 implica directamente el siguiente teorema, que será muy importante más adelante.

Teorema 2.41. El h -polinomio $h_M(x)$ de descascaramiento de una matroide es una invariante de Tutte-Grothendieck. Más aún, se tiene que $h_M(x) = T(M; x, 1)$.

Demostración. 2.31 implica que

$$\begin{aligned} h_M(x) &= f_M(x-1) \\ &= T(M; (x-1) + 1, 1) \\ &= T(M; x, 1) \end{aligned}$$

□

El teorema anterior es muy fuerte, pues da un método para probar que un vector es igual que el h -vector de una matroide por inducción.

Para finalizar calculamos el h -vector en un ejemplo.

Ejemplo 2.42. Sea $M = (E, \mathcal{I})$ la matroide del ejemplo 2.7. El f -vector de la matroide viene dado por $f_M = (1, 6, 14, 14)$, luego $f_M(x) = 14 + 14x + 6x^2 + x^3$, de donde se tiene que

$$\begin{aligned} h_M(x) &= (x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 14(x-1) + 14 \\ &= x^3 + 3x^2 + 5x + 5 \end{aligned}$$

Así que el h -vector de M está dado por $h_M = (1, 3, 5, 5)$.

3. La conjetura de Stanley

A mediados de los años 70 se introdujo una nueva herramienta para estudiar los complejos simpliciales. La idea general es asociar objetos algebraicos que codifiquen propiedades del complejo. Con tal propósito aparecieron los anillos de Stanley-Riesner. A continuación se presenta un corto resumen del trabajo en este tipo de anillos que al final lleva a una conjetura que sigue sin ser respondida. Los detalles y los teoremas presentados en esta sección se encuentran en [15], [16] y [17].

Para empezar se necesita unas definiciones técnicas de álgebra conmutativa.

Definición 3.1. La **dimensión de Krull** de un anillo conmutativo con unidad R es el supremo de las longitudes de las cadenas de ideales primos de R ordenados por contención.

Definición 3.2. Sea M un R -Módulo. Un elemento r de M es **regular** si no es un divisor de cero en M y M/rM no es el módulo 0. Una **secuencia regular** de M es una sucesión de elementos r_1, r_2, \dots, r_k de elementos de M tales que r_1 es regular y r_j es regular en M/M_j donde M_j es el submódulo de M generado por r_1, r_2, \dots, r_{j-1} . La **profundidad** de M es el supremo de las longitudes de secuencias regulares. La **profundidad** de R es su profundidad como R -módulo.

Se sabe que la dimensión de Krull es una cota superior de la profundidad y que estas dos invariantes no coinciden en general. Sin embargo hay una familia especial de anillos en la que pasa esto.

Definición 3.3. Un anillo es de **Cohen-Macaulay** si su dimensión de Krull y su profundidad son iguales.

Existen muchas herramientas para trabajar con anillos de Cohen-Macaulay y la teoría de anillos de Stanley-Riesner explota varias de estas propiedades. Ahora si se presentan las definiciones para complejos.

Definición 3.4. Sea $\Delta = (E, I)$ un complejo simplicial puro tal que para todo $e \in E$, $\{e\} \in I$. Sea \mathbb{F} un campo y sea $R = \mathbb{F}[x_e], e \in E$. Sea I_Δ el ideal generado por los productos de monomios de elementos que no están en I , es decir $I_\Delta = \langle x_{e_1}x_{e_2}\dots x_{e_k} \mid \{e_1, e_2, \dots, e_k\} \notin I \rangle$. El ideal I_Δ se llama el ideal de **Stanley-Riesner** de Δ . Sea $A_\Delta = R/I_\Delta$. El anillo A_Δ se denomina el anillo de **Stanley-Riesner** de Δ .

Los anillos de Stanley-Riesner codifican de manera algebraica una gran cantidad de información del complejo. Estudiando este tipo de anillos es posible probar varias propiedades importantes. En particular, existe una familia de complejos, que contiene a la familia de los matroides, para los que el anillo de Stanley-Riesner es un anillo de Cohen-Macaulay. Los complejos que cumplen esta propiedad se llaman complejos de **Cohen-Macaulay** y tienen varias propiedades interesantes como el siguiente teorema.

Teorema 3.5. El h -vector de un complejo de Cohen-Macaulay es una O -secuencia.

La demostración se basa en el estudio de la función $Hilb_{\mathbb{F}}(A_{\Delta}, x) = \sum_{n \geq 0} \dim_{\mathbb{F}}(A_i)x^i$, donde los A_i son los espacios vectoriales de polinomios homogéneos de A_{Δ} . Esta función se llama la serie de Hilbert de A_{Δ} y se puede escribir como una función racional que en su denominador tiene el h -polinomio.

Una pregunta natural, es si estos multicomplejos tienen alguna propiedad especial en el caso en que Δ es el complejo simplicial asociado a una matroide. Aunque no parece haber una descripción de la matroide en términos del multicomplejo que induce la O -secuencia, el estudio de ejemplos permite formular la famosa conjetura de Stanley.

Conjetura 3.6. El h -vector de una matroide $M = (E, \mathcal{I})$ es una O -secuencia pura.

El siguiente ejemplo ilustra la conjetura.

Ejemplo 3.7. Sea M la matroide del ejemplo 2.7. En 2.42 se vio que $h_M = (1, 3, 5, 5)$. Sea

$$C = \{1, x, y, z, x^2, xy, xz, y^2, z^2, x^3, x^2y, x^2z, y^3, z^3\}$$

Nótese que C es un ideal de orden con todos sus maximales del mismo grado, luego su f -vector, que es $(1, 3, 5, 5)$, es una O -secuencia pura. Así que la conjetura vale para M .

Existen varios resultados parciales que prueban la conjetura para familias especiales de matroides. Christopher O'Neil y Federico Ardila verificaron la conjetura para todas las matroides lineales con $|E| \leq 5$ con ayuda de un programa que está descrito en [2]. Hà, Stokes y Zanello [7] probaron la conjetura para matroides M con $r(M) \leq 3$. La prueba extiende los métodos de Stanley y estudia los anillos A_{Δ} de manera detallada. Suho Oh [12] usó las construcciones de permutahedros generalizados de Alexander Postnikov [14] para probar la conjetura en el caso de matroides cotransversales (duals de las matroides que surgen de estudiar matrimonios en grafos). La prueba asocia un polítopo a la matroide y prueba que los

puntos enteros que están dentro del polítopo son los exponentes de un multicomplejo que realiza el h -vector. Chávez-Lomelí, Merino, Noble y Ramírez-Ibañez probaron la conjetura para matroides "paving", probando que el h -vector de estas matroides está casi determinado por la condición impuesta. Criel Merino [10] usó una construcción de Biggs [4] y otro resultado para probar la conjetura para matroides cográficas. A continuación se presentará esta última prueba y una reinterpretación de esta con la esperanza de producir una prueba que se pueda generalizar para la familia de matroides lineales.

4. La conjetura para matroides cográficas

4.1. Matroides gráficas

En esta sección será presentada una familia muy especial de matroides que viene de la teoría de grafos. Un grafo es una tripla ordenada $G = (V, E, i)$ donde V y E son conjuntos e $i : E \rightarrow \binom{V}{2} \cup V$ es una función. Los elementos de V se llaman **vértices** y los de E se llaman **aristas**. Dos vértices v_1 y v_2 son vecinos si $\{v_1, v_2\}$ está en la imagen de i . Una arista de e se llama un **loop** si $i(e) \in V$. Es posible representar un grafo como un conjunto de puntos que forman los vértices y rectas uniendo los vértices que están en la imagen de i . Los loops se representan con círculos que tienen al vertice de su imagen bajo i y no pasan por ningún otro vértice. Un **camino** es una sucesión de vertices v_1, v_2, \dots, v_{k+1} y aristas e_1, e_2, \dots, e_k tales que $i(e_i) = \{v_i, v_{i+1}\}$. El número k se llama la **longitud** del camino. Un **ciclo** es un camino tal que $v_1 = v_{k+1}$. Nótese que los loops son ciclos de longitud 1. Se dice que un ciclo es **minimal** si los vértices v_1, \dots, v_k son todos diferentes.

Un grafo es **conexo** si para toda pareja de vértices existe un camino que los contiene. Un grafo G es **acíclico** si no se puede formar un ciclo con sus vértices y aristas. Un **bosque** de G es un subgrafo de G que es acíclico. Un bosque es generador si al agregar cualquier arista de G que no está en el bosque se forma un ciclo. Nótese que G se puede particionar en el conjunto de elementos que están conectados por un camino. Las clases de esta partición se denominan las **componentes conexas** de G . Un grafo es un **árbol** si es acíclico y conexo. Los bosques generadores de un grafo conexo, son árboles y se denominan **árboles generadores**.

Para $v \in V$ se define el **grado externo** $exdeg(v)$ como la cantidad de aristas normales de G que tienen a v en su imagen bajo i . El **grado interno** $indeg(v)$ es dos veces la cantidad de loops que tienen a v como imagen bajo i . El **grado** $deg(v)$ es la suma del grado externo y grado interno. Para cada pareja de vértices $\{v, v'\}$ sea $\nu(v, v')$ la cantidad de aristas $e \in E$ tales que $i(e) = \{v, v'\}$

Teorema 4.1. Dado un grafo $G = (V, E, i)$, se define $\mathcal{I}(G)$ como la familia de los subgrafos de G que son bosques. Entonces la pareja $M(G) = (E, \mathcal{I}(G))$ es una matroide. Si $M = (E, \mathcal{I})$ es una matroide isomorfa a una de este tipo se dice que M es **gráfica**.

Demostración. Sea $\{x_v\}_{v \in V}$ la base canónica de \mathbb{R}^V como espacio vectorial³. Sea $<$ un orden total para los elementos de V . Para cada arista $i(e) = \{a, b\}$ con $a \geq b$, sea $v_e = x_a - x_b$

³este argumento funciona en general reemplazando \mathbb{R} por un campo de característica 0 o p , con p sufi-

(nótese que a los loops se les asigna el vector 0). La familia de vectores $V = \{v_e \mid e \in E\}$ induce una matroide naturalmente. Se probará que un subconjunto S de V es linealmente dependiente si y solo el conjunto de aristas correspondientes contiene un ciclo.

Sea S un subconjunto de V linealmente dependiente y sea $\{\lambda_s\}_{s \in S}$ una familia de números reales no todos nulos tales que $\sum_{s \in S} \lambda_s v_s = 0$. Si S contiene un loop no hay nada que probar. Sea $s_1 \in S$ tal que $\lambda_{s_1} \neq 0$ y sean a_1, a_2 los vértices de s_1 . La coordenada a_2 en la combinación lineal es 0, luego tiene que haber un $s_2 \neq s_1 \in S$ tal que $a_2 \in s_2$, pues s_1 aporta un valor no nulo en esta coordenada. Sea a_3 el otro vértice de s_2 . Si $a_3 = a_1$ se tiene un ciclo (arista doble). Si no se puede repetir el proceso que describimos de manera recursiva a continuación.

Supóngase que se tiene una secuencia $\{s_i\}_{i=1}^k \subseteq S$ tal que cada s_i es una arista que une a los vértices a_i y a_{i+1} de modo que a_{i+1} no pertenece a s_j para $1 \leq j \leq i-1$ y que $\lambda_{s_i} \neq 0$ para $i \in [k]$. La coordenada a_{k+1} es 0 en la combinación lineal, y s_{k+1} aporta $\pm \lambda_{s_{k+1}}$ a la suma. La hipótesis dice que la coordenada a_{k+1} es 0 en v_{s_i} para $1 \leq i \leq k-1$, luego tiene que existir $s_{k+1} \in S$ que tiene a a_{k+1} como vértice y tal que $\lambda_{s_{k+1}} \neq 0$.

Nótese que la secuencia anterior no puede ser infinita, pues la cantidad de vértices es finita. Sea s_n la última arista de la secuencia y sea a_j ($1 \leq j < n$) el vértice de s_n que no es a_n . Entonces $\{s_i\}_{i=j}^n$ forma un ciclo con secuencia de vértices a_j, a_{j+1}, \dots, a_n .

Ahora toca probar que si un conjunto S tiene un ciclo, entonces es linealmente dependiente. Sean a_1, a_2, \dots, a_{n+1} los vértices de un ciclo minimal contenido en S y sean s_1, \dots, s_n las aristas tales que s_i une los vértices a_i y a_{i+1} (donde $a_{n+1} = a_1$ por definición). Se puede suponer que $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ pues cambiar el signo de un vector no afecta en nada las relaciones de independencia lineal de la familia de vectores que se está considerando. Así que para cada $i \in [n]$ se tiene que $v_{s_i} = e_{a_{i+1}} - e_{a_i}$, luego $\sum_{i=1}^{n-1} v_{s_i} = e_{s_n} - e_{s_1} = v_{s_n}$ que es una relación de dependencia lineal. \square

Vale la pena resaltar que se probó un resultado más fuerte que lo que dice el enunciado.

Corolario 4.2. Las matroides gráficas son lineales.

Además la familia de vectores descritos en la demostración definen una matriz importante en la teoría de grafos que será usada más adelante.

Definición 4.3. La **matriz de incidencia** A_G de un grafo G sobre un campo \mathbb{F} es la matriz en $\mathcal{M}_{V \times E}(\mathbb{F})$ tal que el vector en la columna indexada por e es v_e .

cientemente grande.

Otra matriz relacionada con la matriz de incidencia es la Laplaciana del grafo.

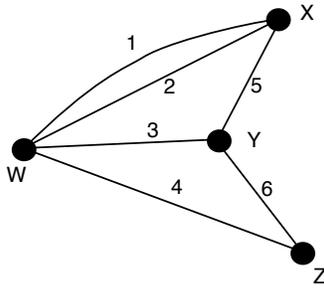
Definición 4.4. La **matriz Laplaciana** Q_G de un grafo G es la matriz en $\mathcal{M}_{V \times V}(\mathbb{F})$ tal que $Q_{v,v'} = -\nu(v, v')$ si $v \neq v'$ y $Q_{v,v} = \text{exdeg}(v)$.

Lema 4.5. Sea G un grafo. Entonces $Q_G = A_G A_G^T$.

Demostración. Se tiene que la coordenada (v, v) de $A_G A_G^T$ es el producto punto de la fila v de A_G multiplicada por sí misma. Esa fila tiene un ± 1 por cada arista que entra en v , es decir que la entrada es $\text{exdeg}(v)$. La entrada en (v, v') es el producto punto de la fila v y la fila v' de A_G . Las columnas en las que representan las aristas que unen a v con v' y los signos son opuestos por construcción de A_G . Se sigue que el producto punto es $-\nu(v, v')$, luego se tienen la identidad buscada. \square

Ejemplo 4.6. La siguiente matroide se obtiene del grafo que está debajo. Se tiene que $M = (E(G), I(G))$ donde $E(G) = [6]$ y el conjunto de independientes viene dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(G) = & \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\} \\ & \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \\ & \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \\ & \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 6\}, \\ & \{2, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 5, 6\}, \{4, 5, 6\}\} \end{aligned}$$



La matriz de incidencia del grafo inducida por el orden de los vértices $W > X > Y > Z$ es:

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz Laplaciana de G viene dada por:

$$Q_G = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hay un lenguaje correspondiente entre las estructuras de las matroides y los grafos. A continuación se presentan dos teoremas no triviales de la teoría de grafos, que son consecuencia de 4.1. Los conjuntos indendientes corresponden a bosques. Los axiomas (I1) e (I2) son triviales para los bosques. En cambio, (I3) corresponde al siguiente teorema.

Teorema 4.7. Sea G un grafo y sean A y B dos bosques de G tales que B tiene más aristas que A . Entonces existe una arista e de B que no está en A tal que $A \cup \{e\}$ es un bosque.

Se tiene otro teorema para bosques generadores, que son los que corresponden a las bases. (B1) no dice nada interesante, pero (B2) y el hecho que las bases tienen todas el mismo tamaño si son propiedades interesantes del grafo.

Teorema 4.8. Sea G un grafo y sean A y B bosques generadores de G . Entonces los dos tienen la misma cantidad de aristas, y para todo e que sea arista de A y no de B existe una arista e' de B tal que $(A - \{e\}) \cup \{e'\}$ es un árbol generador. Además se tiene que la cantidad de aristas es la cantidad de vértices menos la cantidad de componentes conexas.

Demostración. Los primeros dos resultados no necesitan prueba. Nótese que es suficiente probar el tercer resultado para grafos conexos, pues un bosque generador es una unión de árboles generadores de las componentes conexas de G . Suponga que G es un grafo conexo. Sea G' el grafo que resulta de agregar una arista a cada par de vértices no conectados en G . Sean v_1, v_2, \dots, v_n los vertices de G . Hay un camino de aristas de G' que recorre los vertices en orden creciente, y ese camino tiene $n - 1 = |V| - 1$ aristas, además cualquier otra arista forma un ciclo en ese camino, luego el rango de G' es $|V| - 1$. Sea A un árbol generador

de G . Se tiene que A tiene todos los vértices de G , luego no se le puede agregar ninguna arista de G' sin formar un ciclo. Se sigue que A es un árbol de G' y como todos los árboles generadores de un grafo tienen la misma cantidad de vértices la cantidad de aristas de A es $|V| - 1$. \square

Una combinación del teorema anterior y 4.1 da el siguiente teorema que es esencial en el estudio del juego del dólar más adelante.

Teorema 4.9. Sea $G = (V, E, i)$ un grafo conexo. El rango de A_G es igual a $|V| - 1$ y el espacio nulo de A_G^T es generado por el vector $\mathbf{1} := (1)_{v \in V}$ de \mathbb{F}^V .

Demostración. Se sabe que el rango de la matriz es la mayor cantidad de columnas linealmente independientes en A_G , es decir, la cantidad de elementos en una base de $M(G)$. Por 4.8 se tiene que esto corresponde al tamaño de un árbol generador de G , que es $|V| - 1$. Esto quiere decir que todos que la codimensión de la matriz A_G^T es 1 y como todas las filas de esta matriz suman cero, se tiene que $\mathbf{1}$ es un elemento del espacio nulo y por tanto lo genera. \square

Este teorema también da información del espacio nulo de la matriz Laplaciana del grafo.

Corolario 4.10. El espacio nulo de Q_G es el generado por $\mathbf{1}$.

Demostración. Sea v un elemento del espacio nulo de Q_G . Entonces $v^T(Q_G v) = v^T(0) = 0$, luego por 4.5 y 4.9 por se tiene que $0 = \|v^T Q_G v\| = \|v^T A_G\| \cdot \|A_G^T v\| = \|A_G^T v\|^2$, de donde v está en el espacio nulo de A_G^T , que es el generado por $\mathbf{1}$.⁴ Además todas las filas de Q_G suman 0, luego $\mathbf{1}$ está en el núcleo de Q_G . \square

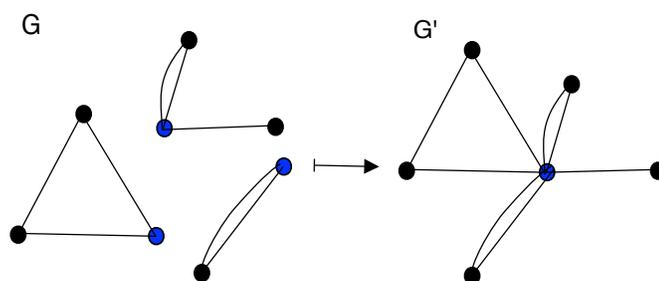
Ahora se probará que todas las matroides gráficas se pueden obtener a partir de grafos conexos. Esta propiedad también va a ser muy importante más adelante.

Teorema 4.11. Para todo grafo $G = (V, E, i)$ existe un grafo conexo $G' = (V', E', i')$ tal que $M(G) \cong M(G')$.

Demostración. Sean G_1, G_2, \dots, G_k las componentes conexas de G y sean v_1, v_2, \dots, v_k vértices de las componentes respectivamente. Sea G' el grafo que resulta al identificar estos vértices como uno solo, tal como se muestra en la figura. Se probará que el conjunto de

⁴Aquí $\| - \|$ representa la norma euclídea usual.

bases es igual para las dos matroides. Para eso, hay que notar que cualquier camino entre dos puntos de componentes diferentes de G tiene que pasar por el vertice v que resulta de pegar los v_i . Luego cualquier árbol generador de G' restringido a una componente G_i , da un árbol generador de G_i . Así que un árbol generador de G' induce un bosque generador de G . Además cada bosque generador de G al ser visto en G' es un árbol generador, pues para salir de una componente en tal ciclo hay que pasar dos veces por v y eso implicaría tener un ciclo dentro de la componente. Se sigue que las bases de $M(G)$ y $M(G')$ están en correspondencia natural, luego $M(G) \cong M(G')$.



□

Para finalizar nótese que las contracciones y supresiones tienen interpretaciones combinatorias elegantes e ilustrativas. La supresión es simplemente eliminar una arista del grafo. La contracción corresponde a pegar los dos vértices unidos por la arista que se va a contraer y desaparecer esa arista. Esta operación puede hacer que aparezcan aristas múltiples y loops. Es por eso que vale la pena considerar los grafos en este contexto tan general. Usando contracciones y supresiones no se pierde nunca la propiedad de ser gráfica, luego la teoría de invariantes de Tutte-Grothendieck se puede restringir a la teoría de grafos como un caso particular. Para un grafo G , el polinomio de Tutte $T(M(G); x, y)$ se denota simplemente por $T(G; x, y)$, teniendo en cuenta que se definen dos grafos como isomorfos si generan la misma matroide.

4.2. El juego del dólar

El juego del dolar es una variación del modelo de la pila de arena⁵, que ha sido muy estudiado pues modela varias situaciones físicas y da un teorema análogo al teorema de Riemann-Roch clásico para grafos y curvas tropicales como se muestra en [3] y [8]. A continuación se presentará una pequeña variación de este juego presentado por Merino en [9] que generaliza (al caso de matroides con loops) el juego introducido por Biggs en [4]. De aquí en adelante G es un grafo conexo a menos que se diga lo contrario.

Informalmente, el juego del dólar consiste una cantidad entera y no negativa de dólares todos los vértices excepto uno que es un banco. Un vértice diferente del banco está listo si la cantidad de dólares que tiene es mayor o igual que su grado. El banco está listo si ningún otro vértice está listo. Un disparo de un vértice listo consiste en pasarle un dolar a cada uno de sus vecinos. El objetivo es estudiar las posibles configuraciones de dólares en el grafo. Para eso se define el juego de manera precisa.

Definición 4.12. Sea $G = (V, E, i)$ un grafo y $q \in V$ un vértice. Una q -**configuración** de G es una función $\theta : V \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\theta(v) \geq 0$ si $v \neq q$ y $\theta(q) = -\sum_{v \neq q} \theta(v)$. Se define un orden parcial en las configuraciones dado por comparación de coordenadas diferentes de q , es decir, si θ y θ' son dos configuraciones, entonces $\theta \leq \theta'$ si y solo si $\theta(v) \leq \theta'(v)$ para todo $v \in V - q$.

Definición 4.13. Un vértice $v \neq q$ esta **listo** en una q -configuración θ si $\theta(v) \geq \deg(v)$. El vértice q está **listo** si y solo si ningún otro vértice de G esta listo. Un **disparo** de un vértice v que está listo en θ es una nueva configuración θ' tal que $\theta'(v') = \theta(v') + \nu(v, v')$ si $v' \neq v$ y $\theta'(v) = \theta(v) - \text{exdeg}(v)$.

Definición 4.14. Una **secuencia legal** de la configuración θ a la configuración θ' es una secuencia no vacía y finita de vértices v_1, v_2, \dots, v_k tales que v_1 está listo en θ , v_{i+1} está listo en la configuración θ_i obtenida después de disparar v_1, \dots, v_i y $\theta' = \theta_k$. La existencia de una secuencia legal que va de θ a θ' , se denota por $\theta \rightarrow \theta'$. Las secuencias legales se denotan con las letras \mathcal{X}, \mathcal{Y} . Si \mathcal{X} es una secuencia legal, entonces $\mathcal{X}(v)$ es el número de veces que aparece el vértice v en \mathcal{X} .

Nótese que si $\theta \rightarrow \theta'$ con una secuencia \mathcal{X} entonces $\theta' = \theta - Q_G(\mathcal{X}(v))_{v \in V}$. Esto quiere decir que el juego del dolar está muy relacionado con la matriz laplaciana del grafo. En

⁵En inglés llamado *chip firing game* o *abelian sandpile model*

particular, si $\theta = \theta'$, entonces $(\mathcal{X}(v))_{v \in V}$ esta en el núcleo de Q_G , luego es un múltiplo escalar de $\mathbf{1}$ por 4.10

La idea es estudiar como se pueden mover las monedas en el grafo. Para eso se definirán varios tipos especiales de configuraciones.

Definición 4.15. Una q -configuración θ es **estable** si q está listo.

Definición 4.16. Una configuración θ es **recurrente** si $\theta \rightarrow \theta$, es decir, existe una secuencia legal que empieza y termina en θ .

Definición 4.17. Una configuración θ se llama **crítica** si es estable y recurrente.

El siguiente teorema permitirá demostrar que la órbita de una configuración θ es finita, es decir, θ solo puede llegar a finitas configuraciones por medio de secuencias críticas.

Teorema 4.18. Sea θ una configuración. Al jugar el juego del dolar empezando en θ siempre se pasa por una configuración crítica, sin importar en que orden se disparen los vértices.

Demostración. Primero se probará que cualquier secuencia infinita llega a una configuración estable en algún punto. Suponga que existe una secuencia legal infinita que no involucra a q . Entonces hay un vértice v que se dispara infinitas veces. Cada vecino de v tiene que ser disparado infinitas veces, pues de lo contrario acumularía cantidades arbitrariamente grandes de fichas, y si q no es disparado no entran fichas nuevas al tablero. Como el grafo es conexo, todos los vértices deben ser disparados infinitas veces luego se pierden infinitas fichas en el juego al disparar a los vecinos de q . Esto es imposible pues sólo hay finitas fichas en los vértices. Disparando hasta que vuelva a estar listo un vértice diferente de q se puede repetir el proceso para llegara a otra configuración estable y repetir el proceso infinitas veces, luego si no se repite ninguna estable habría infinitas estables, que es imposible pues si θ es estable entonces $\sum_{v \neq q} \theta(v) \leq \sum_{v \neq q} (\deg(v) - 1)$. \square

Definición 4.19. Sean \mathcal{X} e \mathcal{Y} secuencias de vértices. Se define $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ como la secuencia que resulta de borrar las primeras $\mathcal{X}(v)$ apariciones de v en \mathcal{Y} si $\mathcal{Y}(v) > \mathcal{X}(v)$ o borrar todas las apariciones de v en el otro caso, para cada $v \in V$.

Usando la definición anterior se puede probar un teorema muy importante sobre configuraciones críticas.

Teorema 4.20. Sea θ una configuración y sean \mathcal{X} e \mathcal{Y} secuencias legales para θ , en las que no se dispara q . Entonces $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^{\mathcal{X}})$ es una secuencia legal para θ , que se forma poniendo primero los vértices de \mathcal{X} y después los de $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.

Demostración. Como \mathcal{X} es legal para θ , si $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^{\mathcal{X}})$ no es legal para θ , el primer vértice v que no se puede disparar aparece en $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^{\mathcal{X}})$ después de \mathcal{X} . Sea \mathcal{Z} la secuencia inicial de $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^{\mathcal{X}})$ que para en el vértice anterior a la aparición de v que no se puede disparar y sea \mathcal{Z}' la secuencia inicial de \mathcal{Y} que para justo antes de la aparición $\mathcal{Z}(v) + 1$ de v . Sean θ_1 y θ_2 configuraciones tales que $\theta \xrightarrow{\mathcal{Z}} \theta_1$ y $\theta \xrightarrow{\mathcal{Z}'} \theta_2$. Por definición de v se tiene que $\theta_1(v) < \deg(v) \leq \theta_2(v)$. Se probará que $\theta_1(v) \geq \theta_2(v)$. Nótese que $\theta_1(v) = \theta(v) - \mathcal{Z}(v)exdeg(v) + \sum_{v' \neq v} \mathcal{Z}(v')\nu(v, v')$ y $\theta_2(v) = \theta(v) - \mathcal{Z}'(v)exdeg(v) + \sum_{v' \neq v} \mathcal{Z}'(v')\nu(v, v')$. Se tiene que v aparece en $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, luego $\mathcal{Y}(v) > \mathcal{X}(v)$ y en \mathcal{Z} y \mathcal{Z}' aparece v la misma cantidad de veces pues se borran los primeros $\mathcal{X}(v)$ de $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ y eso compensa. Así que $\mathcal{Z}(v)exdeg(v) = \mathcal{Z}'(v)exdeg(v)$. Para cada $v' \neq q$ hay dos casos. El primero es que $\mathcal{Y}(v) > \mathcal{X}(v)$ y en este caso pasa igual que con v , $\mathcal{Z}(v') = \mathcal{Z}'(v')$. El segundo es que $\mathcal{X}(v') \geq \mathcal{Y}(v') \geq \mathcal{Z}'(v')$, se tiene que v' se dispara $\mathcal{X}(v')$ veces en \mathcal{Z} pues no aparece en $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, luego $\mathcal{Z}(v') \geq \mathcal{Z}(v)$. En ambos casos se tiene que $\mathcal{Z}(v') \geq \mathcal{Z}'(v')$ y esto implica que $\mathcal{Z}(v')\nu(v, v') \geq \mathcal{Z}'(v')\nu(v, v')$. Se sigue que la suma que define $\theta_1(v)$ es mayor o igual a la que define $\theta_2(v)$. Contradicción. \square

Corolario 4.21. Sea θ una configuración y sean ω y ω' configuraciones tales que $\theta \rightarrow \omega$ y $\theta \rightarrow \omega'$, sin necesidad de disparar q . Existe una configuración θ' tal que $\omega \rightarrow \theta'$ y $\omega' \rightarrow \theta'$.

Demostración. Sean \mathcal{X} y \mathcal{Y} secuencias legales tales que $\theta \xrightarrow{\mathcal{X}} \omega$ y $\theta \xrightarrow{\mathcal{Y}} \omega'$. Nótese que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^{\mathcal{X}})(v) = (\mathcal{Y}, \mathcal{X}^{\mathcal{Y}})(v) = \max\{\mathcal{X}(v), \mathcal{Y}(v)\}$ para todo v y como el resultado final de una secuencia crítica solo depende del vector asociado, ambas mandan a θ a la misma configuración θ' . Se tiene entonces que $\omega \xrightarrow{\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}} \theta'$ y $\omega' \xrightarrow{\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}} \theta'$. \square

Corolario 4.22. Sea θ una configuración y sean θ_1 y θ_2 configuraciones tales que $\theta \xrightarrow{\mathcal{X}} \theta_1$ y $\theta \xrightarrow{\mathcal{Y}} \theta_2$ sin disparar q . Si θ_1 es estable entonces $\theta \xrightarrow{(\mathcal{Y}, \mathcal{X}^{\mathcal{Y}})} \theta_1$. Más aún, si θ_2 es estable, entonces $\theta_1 = \theta_2$.

Demostración. Se sabe que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^{\mathcal{X}})$ es una configuración es legal para θ . Después de aplicar \mathcal{X} se llega a una configuración estable, luego $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ tiene que ser vacío, por lo que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}) = \mathcal{X}$, luego también se tiene que $(\mathcal{Y}, \mathcal{X}^{\mathcal{Y}}) = \mathcal{X}$, luego vale la primera parte. Si θ_2 también es estable, entonces $(\mathcal{Y}, \mathcal{X}^{\mathcal{Y}})$ va simultáneamente a θ_1 y θ_2 , luego θ_1 y θ_2 son iguales. \square

Para finalizar la introducción a las configuraciones críticas se probará que toda configuración puede llegar solamente a una configuración crítica.

Teorema 4.23. Sea θ una q -configuración. θ es crítica si y solo si es estable y existe una secuencia legal \mathcal{X} de θ tal que $\mathcal{X}(v) = 1$ para todo $v \in V(G)$.

Demostración. Si se tiene una secuencia crítica con $\mathcal{X}(v) = 1$ para todo $v \in V(G)$ y θ es estable se tiene que θ es crítico pues al aplicar \mathcal{X} se tiene que volver a θ , ya que $(\mathcal{X}(v))_{v \in V(G)}$ esta en el espacio nulo de Q_G .

Supóngase que c es una configuración crítica y sea \mathcal{X} una secuencia legal de c tal que $c \xrightarrow{\mathcal{X}} c$. Se tiene que $(\mathcal{X}(v))_{v \in V}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{1}$, pues está en el espacio nulo de Q_G . Como c es estable, el primer vértice disparado en \mathcal{X} es q . Sea v el primer vértice que se repite en \mathcal{X} (asumiendo que $\mathcal{X}(v) > 1$). Suponga que $v \neq q$ y que $c(v) = t < \deg(v)$. Para que v sea disparado dos veces, tienen que entrarle $\deg(v) + \text{exdeg}(v) - t$ fichas disparadas por sus vecinos, sin embargo, si todos sus vecinos disparan una vez solo le entran $\text{exdeg}(v)$ fichas, que es menor que la cantidad de fichas necesarias. Esto quiere decir que entre dos apariciones consecutivas de q en \mathcal{X} , hay a lo más una aparición de cada uno de los otros vértices. Como todos tienen que aparecer la misma cantidad de veces, tiene que ser que cada vértice aparece una vez entre dos apariciones consecutivas de q en \mathcal{X} . Así que la secuencia inicial \mathcal{Y} de \mathcal{X} que para justo antes de la segunda aparición de q , tiene como vector asociado $(\mathcal{Y}(v))_{v \in V} = \mathbf{1}$ como se quería. \square

De este teorema se desprende el siguiente corolario, que ayuda a clasificar las configuraciones.

Corolario 4.24. Sea θ una configuración de G y suponga que c y c' son configuraciones críticas tales que $\theta \rightarrow c$ y $\theta \rightarrow c'$. Entonces $c = c'$.

Demostración. Primero nótese que por 4.22, la sucesión de configuraciones estables y el orden en que llega θ a ellas es independiente de la secuencia legal que se use. En el momento que esta sucesión llegue a una secuencia crítica se puede escoger un orden de los vértices (que empieza en q) tal que al dispararlos se llega otra vez a c . Eso quiere decir que siempre la configuración estable a la que se llega después de c es c , de donde se tiene que no puede haber dos configuraciones críticas diferentes a las que llegue θ . \square

Este último teorema permite definir una relación de equivalencia en el conjunto de las configuraciones, que induce una estructura de grupo entre ellas. El grupo definido, llamado el grupo crítico de G , es un grupo abeliano que resulta ser independiente del vértice q .

Definición 4.25. Sea $\Omega_{G,q}$ el conjunto de las configuraciones. Se define la relación de equivalencia \sim en $\Omega_{G,q}$, de modo que $\theta \sim \theta'$ si y solo si existe una configuración crítica c tal que $\theta \rightarrow c$ y $\theta' \rightarrow c$. Se define el **conjunto crítico** $C_{G,q} = \Omega_{G,q} / \sim$. Se tiene que $|C_{G,q}| = |\mathcal{C}|$ donde \mathcal{C} es el conjunto de las configuraciones de críticas de G . La clase de equivalencia de una configuración θ en $C_{G,q}$ se denota por $[\theta]$.

El siguiente teorema se deja como una muestra de las ventajas de trabajar con $C_{G,q}$ en vez de \mathcal{C} . Su prueba se puede encontrar en [4].

Teorema 4.26. Se define $+ : C_{G,q} \times C_{G,q} \rightarrow C_{G,q}$ tal que $[\theta] + [\theta'] = [\theta + \theta']$. Se tiene que $+$ está bien definida y que $(C_{G,q}, +)$ forma un grupo abeliano. Este grupo se llama el **grupo crítico** de G y es independiente de q .

4.3. La prueba

En esta sección se prueba que las configuraciones críticas inducen de manera natural un ideal de orden puro, que tiene como f -vector a $h_{M(G)^*}$, lo que prueba la conjetura para matroides cográficas.

Primero se probará que las matroides inducen una estructura de ideal de orden puro.

Definición 4.27. Se define el **peso** $w(\theta)$ de una configuración θ como $-w(\theta) = \sum_{v \in V-q} \theta(v)$.

Teorema 4.28. Sea c una configuración crítica minimal en el orden \leq restringido a \mathcal{C} . Entonces se tiene que

$$w(c) = |E| - \deg(q) = \frac{\sum_{v \in V} \text{exdeg}(v)}{2} + \sum_{v \in V} \text{indeg}(v) - \deg(q)$$

Esto quiere decir que todas las configuraciones minimales tienen el mismo peso.

Demostración. Sea \mathcal{X} una secuencia legal de c tal que $(\mathcal{X}(v))_{v \in V} = \mathbf{1}$. Si se disparan las fichas guiados por \mathcal{X} se puede hacer el siguiente procedimiento: Todas las fichas disparadas

de q se marcan con una q . Sea v un vértice diferente de q . Cuando se dispara v se devuelven todas las fichas marcadas en v a su respectivo lugar y se marcan con una v todas las fichas que salen de v y no están marcadas, incluidas las que viajan por los loops. Nótese que al final de todos los disparos, las fichas marcadas están en el vértice que las contenía al principio y que todas las fichas que quedan están marcadas. La primera es clara, pues se especifica que todas las fichas marcadas se devuelven al vértice de donde venían (y eso cubre exactamente la cantidad de aristas entre los dos vértices involucrados). La segunda se tiene porque si una ficha no está marcada es porque no fue disparada y no se necesita para que v esté listo. Como cada vértice es disparado exactamente una vez, se tiene que las fichas no marcadas no afectan los otros vértices, luego por la minimalidad de c no pueden existir. Nótese que hay una ficha marcada por cada arista normal y dos por cada loop. Las fichas marcadas con una q no aportan nada al peso inicial, luego el peso de c está dado por la cantidad de aristas normales que no inciden en q sumadas a dos veces el número de loops del grafo que no inciden en q . Este número es la mitad de la suma de los grados exteriores (que cuenta el número de aristas normales) más la suma de los grados internos (que por definición cuenta cada loop dos veces) menos el grado de q (que excluye las aristas que inciden en q). \square

La prueba de 4.28 también da otra idea para un pedazo de la prueba del siguiente teorema que es lo que va a ser equivalente a la condición de divisibilidad en el ideal de orden.

Teorema 4.29. Sea c una configuración crítica y sea c' una configuración estable tal que $c(v) \leq c'(v)$ para $v \neq q$. Entonces c' es una configuración crítica.

Demostración. Sea \mathcal{X} una secuencia legal de c tal que $c \xrightarrow{\mathcal{X}} c$ con $\mathcal{X}(v) = 1$ para $v \in V$. Se tiene que q se puede disparar en c' , pues por definición es estable. Ahora sea $v \in V - q$ y suponga que todos los vértices que aparecen en \mathcal{X} antes de v pueden ser disparados partiendo de c' y sea θ la configuración obtenida al dispararlos. Sea θ' la configuración obtenida esos mismos vértices empezando en c . Se tiene que hasta ese punto, a v le han entrado la misma cantidad de fichas en cualquiera de los dos casos, pues la cantidad de fichas que entran solo depende de los vértices que se dispararon. Como $c(v) \leq c'(v)$ se tiene que $\theta(v) \leq \theta'(v)$ luego v se puede disparar. Se sigue que \mathcal{X} es una secuencia legal para c' y como su vector asociado es $\mathbf{1}$, se obtiene que $c' \xrightarrow{\mathcal{X}} c'$, luego c' es crítica. \square

Definición 4.30. Se denota por \mathcal{C} al conjunto de configuraciones críticas ignorando el valor que tienen en q . Además sea C la configuración tal que $C(v) = \deg(v) - 1$ para cada $v \neq q$.

Nótese que C es una configuración crítica, pues cualquier estable es menor o igual a ella (por definición) y 4.29 concluye el argumento, pues existe alguna configuración crítica c que es estable, luego $c \leq C$.

Definición 4.31. Se define $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}^{|V|-1}$ de modo que $f(c) = C - c$.

Teorema 4.32. Para cada configuración $c \in \mathcal{C}$ se tiene que $0 \leq \deg(\mathbf{x}^{f(c)}) \leq |E| - |V| + 1$ y las igualdades valen para C y las configuraciones minimales respectivamente.

Demostración. Se tiene que $c \leq C$, luego $0 \leq f(c)$ y así que $\deg(\mathbf{x}^{f(c)}) \geq 0$, pues es la suma de las entradas de $f(c)$. Existe una configuración minimal tal que $c' \leq c$, luego $C - c \leq C - c'$, de donde se obtiene que $\deg(\mathbf{x}^{f(c)}) \leq \deg(\mathbf{x}^{f(c')})$. Además por 4.28 se tiene que

$$\begin{aligned} \deg(\mathbf{x}^{f(c')}) &= w(C) - w(c') \\ &= \sum_{v \neq q} (\deg(v) - 1) - |E| + \deg(q) \\ &= (2|E| - \deg(q) - (|V| - 1)) - |E| + \deg(q) \\ &= |E| - |V| + 1 \end{aligned}$$

□

Corolario 4.33. El conjunto $S_G = \{\mathbf{x}^{f(c)} \mid c \in \mathcal{C}\}$ es un ideal de orden puro.

Demostración. Nótese que si $\mathbf{x}^v \mid \mathbf{x}^{f(c)}$, es por que $0 \leq v \leq f(c)$, luego $c \leq C - v \leq C$, de donde se tiene que $C - v$ es una configuración crítica por 4.29. Así que $f(C - v) = v$, de donde $\mathbf{x}^v \in S_G$. Por 4.32 se tiene que si c es una configuración minimal (cuyas imágenes son los elementos maximales de (S_G, \leq)) entonces $\deg(\mathbf{x}^{f(c)}) = |E| - |V| + 1$, que no depende de c □

Definición 4.34. Se define el **nivel** $niv(c)$ de una configuración crítica c como $niv(c) := \deg(\mathbf{x}^{f(c)}) = w(C) - w(c)$. Se denota por $\Gamma(G)$ al nivel de las configuraciones minimales, es decir, $\Gamma(G) := |E| - |V| + 1$. El **polinomio crítico** $P_q(G, y)$ de una configuración se define como

$$P_q(G, y) := \sum_{c \in \mathcal{C}} y^{\Gamma(G) - niv(c)}$$

Teorema 4.35. Se tiene que $P_q(G, y) = T(G; 1, y)$ luego P_q es independiente de q .

Demostración. Se hará inducción en $|E|$ para concluir la prueba. El caso base es $|E| = 1$

Si G es un loop, entonces la única configuración crítica tiene 0 fichas, y el nivel de la configuración es $|E| - |V| + 1 = 1$, luego $P_q(G, y) = y = T(G; 1, y)$. Si G es un coloop (grafo con dos vértices una arista uniendolos), entonces la única configuración es poner un 0 en el vértice diferente de q . En este caso el nivel es $|E| - |V| + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$, luego $P_q(G, y) = 1 = T(G; 1, y)$.

Para el paso inductivo hay que separar en varios casos y la estrategia va a ser usar las recurrencias de Tutte-Grothendieck. Supóngase que el teorema vale para todos los grafos con una cantidad menor que n aristas. Sea G un grafo con $n > 1$ aristas y sea e una arista de G que incide en q (se puede escoger pues el grafo es conexo). Se tienen tres posibilidades para e .

La primera es que e sea un loop de G . Al suprimir q las mismas configuraciones críticas funcionan, porque el que q este listo no depende de sus aristas, sino de que los demás vértices no estén listos. En este caso el nivel $\Gamma(G)$ del grafo disminuye en 1, pues se pierde una arista y se mantiene el número de vértices. Combinando lo anterior con la hipótesis de inducción se obtiene que

$$P_q(G, y) = yP_q(G \setminus e, y) = T(M_{loop}; 1, y)T(G \setminus e; 1, y) = T(G; x, y)$$

La segunda posibilidad es que e sea un coloop que conecta a q con otro vértice u . Entonces se puede pensar en la supresión de e , de modo que se desconecta el grafo, pero por 4.11, es posible identifica u y q como un sólo vértice y obtener un grafo conectado que genera la misma matroide que $G \setminus e$. Se denota por (q, u) el vértice que resulta de pegar q y u . Para cada configuración crítica c de G , sea c' la configuración que a cada vértice de $G \setminus e$ que no sea (q, u) le asigna el mismo valor. Estas configuraciones están en biyección, pues al disparar q en G , tiene que quedar listo u y da lo mismo que disparar (q, u) en la supresión. Al suprimir e y unir q con u , se pierde una arista y un vértice, luego $\Gamma(G) = \Gamma(G \setminus e)$. Además, el nivel de cualquier configuración se mantiene igual pues al pasar de G a $G \setminus e$ todos los pesos de las configuraciones disminuyen en $\deg(u) - 1$. Mezclando lo anterior con la hipótesis de inducción, se obtiene que

$$P_q(G; y) = P_q(G \setminus e, q) = T(G \setminus e; 1, y) = T(G; 1, y)$$

La tercera posibilidad es que e no sea ni un loop ni un coloop de G . Entonces e conecta a q con otro vértice u . Se separan las configuraciones críticas en dos tipos:

1. En la primera familia están todas las configuraciones críticas c de G tales que $c(u) < \deg(u) - 1$. Sea c' la configuración de $G \setminus e$ tal que $c'(v) = c(v)$ para todo v . Cualquier secuencia legal para c es una secuencia legal para c' , pues en cada punto todos los vértices tienen la misma cantidad de fichas que en c , excepto u , que tiene una ficha menos después de que q fue disparado. De la misma manera toda configuración c' de $G \setminus e$ induce una configuración de G con $c(u) < \deg(u) - 1$. Además $\Gamma(G \setminus e) = \Gamma(G) - 1$ pues se pierde una arista y el nivel de la configuración maximal baja en 1 (pues el valor en u es $\deg(u) - 2$ ahora). El peso de las configuraciones consideradas se queda quieto. Así que el aporte de estas configuraciones a $P_q(G; y)$ es $P_q(G \setminus e, y)$.
2. En la segunda familia están todas las configuraciones críticas c de G tales que $c(u) = \deg(u) - 1$. Para cada configuración c de G sea c' la configuración de G/e tal que $c'(v) = c(v)$ para $v \neq (q, u)$. Recordando que G/e consiste en eliminar e y pegar sus extremos, que son q y u , se obtiene que c' determina unívocamente una configuración de G/e . Existe una secuencia crítica de c que empieza con q, u , por el corolario 4.22 del teorema 4.20. Como para $v \neq (q, u)$ se tiene que el grado de v es igual en G y en G/e , cualquier secuencia legal para c que empiece en q, u induce una secuencia legal para c' . Además el proceso es reversible. Si c' es una configuración crítica, sea c de modo que coincida con c' en todo lo que no sea (u, q) y se define $c(u) = \deg(u) - 1$ (el grado en G). En esta construcción se pierde una arista y un vértice, por lo tanto $\Gamma(G) = \Gamma(G/e)$. El peso de todas las configuraciones disminuye $\deg(u) - 1$ al pasar de c a c' , luego el $niv(c) = niv(c')$ para c entre las configuraciones consideradas. Se sigue que el aporte de estas configuraciones a $P_q(G, y)$ es $P_q(G/e, y)$.

Mezclando el resultado anterior con la hipótesis de inducción se tiene que:

$$\begin{aligned}
 P_q(G, y) &= P_q(G \setminus e, y) + P_q(G/e, y) \\
 &= T(G \setminus e; 1, y) + T(G/e; 1, y) \\
 &= T(G; 1, y)
 \end{aligned}$$

Se verificó el resultado para las tres posibilidades de e , luego se terminó el paso inductivo. \square

Finalmente se tienen las herramientas para probar el teorema principal, que es ahora un simple corolario del trabajo duro.

Teorema 4.36. Las matroides cográficas satisfacen la conjetura de Stanley, es decir, el h -vector de una matroide cográfica es una O -secuencia pura.

Demostración. Sea $M = M(G)^*$ una matroide cográfica correspondiente al grafo conexo G . Se tiene por 4.35 y 2.41 que

$$\begin{aligned} h_M(y) &= T(M; y, 1) \\ &= T(G; 1, y) \\ &= P_q(G; y) \end{aligned}$$

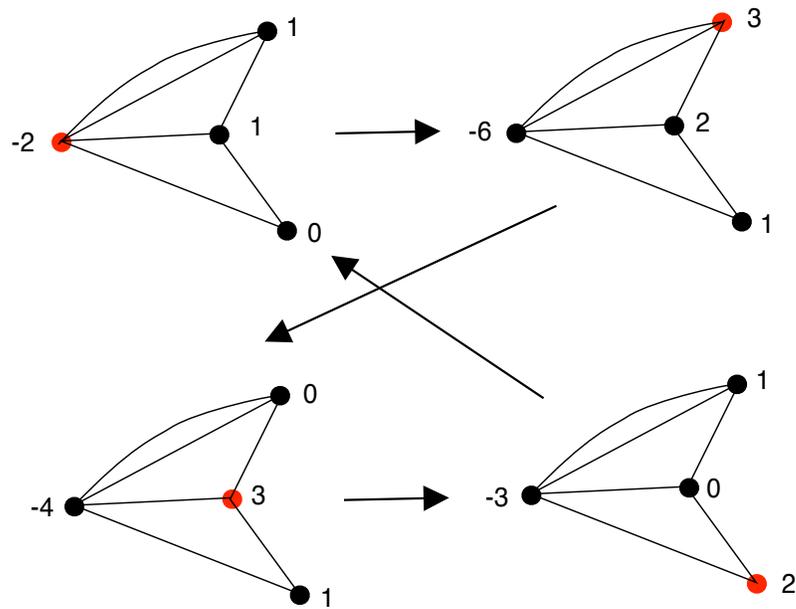
El coeficiente de y^k es, por un lado, $h_{\Gamma(G)-k}$ y por el otro lado, la cantidad de elementos de S_G de grado $\Gamma(G) - k$. Como S_G es un ideal de orden puro, se tiene que h_M es una O -secuencia pura. \square

A continuación se presentará un ejemplo de como calcular las configuraciones críticas de un grafo para una escogencia de q .

Ejemplo 4.37. Sea $G = (V, E, i)$ el grafo del ejemplo 4.6. Escogiendo $q = W$ se calcularán primero las configuraciones críticas minimales de G . Para eso basta recordar que una secuencia legal minimal que lleva a una configuración es una permutación de los vértices que empieza en q . Además, como X y Z no están conectados, las mismas configuraciones sirven si se tiene una permutación con esos dos vértices consecutivos. Eso quiere decir que las posibles secuencias críticas son: $WXYZ$, $WXZY$, $WYXZ$, $WZYX$. Se calcularán las configuraciones críticas minimales correspondientes a cada uno de estos órdenes. Se tiene que $\deg(X) = 3$, $\deg(Y) = 3$ y $\deg(Z) = 2$.

- $WXYZ$: Al disparar W tiene que quedar listo X , al que le entraron dos fichas. Eso quiere decir que $c(X) = 1$. Después de disparar X tiene que quedar listo Y , al que le han entrado 2 fichas desde el inicio. Por lo tanto se tiene que $c(Y) = 1$. Finalmente, al disparar Y , le han entrado dos fichas a Z . Eso quiere decir que $c(Z) = 0$. Luego tenemos que la configuración minimal para esta secuencia crítica es

$$(c(W), c(X), c(Y), c(Z)) = (-2, 1, 1, 0)$$



- $WXZY$: Al disparar W le ha entrado una ficha a X . Esto quiere decir que $c(X) = 1$. Al disparar X no le entra nada nuevo a Z , solo le ha entrado lo del disparo de Z y así se obtiene que $c(Z) = 1$. Finalmente, luego de disparar Z , a Y le han entrado 3 fichas, por lo que Y está listo y $c(Y) = 0$. Se obtiene la configuración crítica

$$(c(W), c(X), c(Y), c(Z)) = (-2, 1, 0, 1)$$

- $WYXZ$: Al disparar W le ha entrado una ficha a Y , luego se tiene que $c(Y) = 2$. Después de disparar Y a X le han entrado tres fichas, por lo que ya está listo y $c(X) = 0$. A Z le han entrado dos fichas después de disparar Y , luego Z está listo y $c(Z) = 0$. Se obtiene la configuración crítica

$$(c(W), c(X), c(Y), c(Z)) = (-2, 0, 2, 0)$$

- $WZYX$: Al disparar W le ha entrado una ficha a Z , luego $c(Z) = 1$. Después de disparar Z le han entrado dos fichas a Y , luego $c(Y) = 1$. Al disparar Y le entre una tercera ficha a X , así que X está listo y $c(X) = 0$. Se obtiene la configuración crítica

$$(c(W), c(X), c(Y), c(Z)) = (-2, 0, 1, 1)$$

Borrando la coordenada de q , se tiene que las configuraciones minimales de \mathcal{C} son $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 1, 1)$. Además la configuración C de \mathcal{C} es $(2, 2, 1)$. Al tomar f , queda que el exponente minimal es $(0, 0, 0)$ y los maximales son $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 0)$, $(2, 0, 1)$ y $(2, 1, 0)$. Así se llega a que S_G esta dado por:

$$S_G = \{1, x, y, z, x^2, xy, xz, y^2, yz, x^2y, x^2z, xy^2, xyz\}$$

El f -vector de S_G viene dado entonces por $(1, 3, 5, 4)$.

Ahora para calcular $M(G)^*$ se encuentra el complemento de la base \mathcal{B} de la matroide. Se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^* = & \{ \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}, \\ & \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 5, 6\} \} \end{aligned}$$

Así que el conjunto de independientes de $M(G)^*$ es:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^* = & \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \\ & \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \\ & \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \\ & \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}, \\ & \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 5, 6\} \} \end{aligned}$$

De donde se obtiene que $f_{M(G)^*} = (1, 6, 14, 13)$, luego

$$f_{M(G)^*}(x) = 13 + 14x + 6x^2 + x^3$$

Y por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} h_{M(G)^*}(x) &= f_{M(G)^*}(x-1) \\ &= x^3 + 3x^2 + 5x + 4 \end{aligned}$$

Se verifica que $h_{M(G)^*} = (1, 3, 4, 5)$ que es igual al f -vector de S_G .

5. Algunas conjeturas alternativas

5.1. La geometría del juego del dólar

El propósito de esta sección es exhibir el juego del dólar como un juego geométrico sobre la retícula entera del cuadrante positivo de $\mathbb{Z}^{|V|-1}$.

La idea inicial es imaginarse las configuraciones como vectores con coordenadas naturales, después de omitir la coordenada q . Disparar un vector v significa sumar el negativo del vector de la columna v de Q_G al eliminarle la entrada correspondiente a la fila q . Todos los vectores que se están sumando apuntan hacia afuera del cono $\mathbb{N}^{|V|-1}$, excepto el que corresponde a la columna q . Esto quiere decir que para todos los vectores excepto el de la fila q , existen puntos de la retícula tales que al sumarles el vector, se salen del cuadrante positivo. Ahora las sumas admisibles, que corresponden a vértices listos, son las que no sacan al vértice del cuadrante. El vector q se suma si y solo si ningún otro vértice puede ser sumado.

Las configuraciones críticas representan puntos de $\mathbb{N}^{|V|-1}$ a las que todos los puntos caen eventualmente. Analizando algebraicamente, se tiene que las órbitas de los puntos representan cosets del \mathbb{Z} -módulo generado por los vectores del juego cuando se extiende el juego a coordenadas enteras. Las configuraciones críticas son representantes canónicos de estas clases inducidas por la estructura de grafos. Llamando $Q_{(G,q)}$ a la matriz que resulta de quitarle la fila q a Q_G , se tiene entonces que el módulo generado es $Q_{(G,q)}\mathbb{Z}^{|V|-1}$. Un resultado que se deriva de este estudio es que $C_{G,q} \cong \mathbb{Z}^{|V|-1}/Q_{(G,q)}^T\mathbb{Z}^{|V|-1}$.

La pregunta que parece interesante es cómo varían estos representantes canónicos cuando se varía q . Se sabe que al variar q se inducen estructuras de multicomplejo puro de manera natural. La idea es ver si por detrás hay alguna estructura geométrica que induzca estos multicomplejos de manera biyectiva. Se sabe que el número total de configuraciones críticas es $P_1(G, 1) = T(G; 1, 1)$, que es el número de bases de la matroide. De esta idea surge la siguiente conjetura que viene de la geometría discreta.

Definición 5.1. La **dimensión** de un subconjunto de \mathbb{R}^n es la dimensión del espacio afín generado por sus elementos, es decir la dimensión del conjunto de las combinaciones lineales tales que los coeficientes suman 1.

Definición 5.2. Sean A_1, A_2, \dots, A_k subconjuntos de \mathbb{R}^n . Se define la **suma de Minkowski** $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ como el conjunto $\{x_1 + x_2 + \dots + x_n \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}$.

Definición 5.3. Un **zonótopo** es una suma de Minkowski de segmentos cerrados $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$ en \mathbb{R}^n .

Definición 5.4. Un paralelepípedo es una suma de Minkowski de k segmentos cerrados, de modo que el conjunto suma tiene dimensión k .

Definición 5.5. Una **teselación** con paralelepípedos de un zonótopo P generado por $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$ es una familia de paralelepípedos P_1, P_2, \dots, P_j de la misma dimensión que P , que son translaciones de la familia de paralelepípedos de dimensión máxima generados por $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$ y tales que:

1. $\bigcup_{j=1}^k P_j = P$
2. $P_i \cap P_j$ es un vacío o un paralelepípedo de dimensión menor que P generado por un subconjunto de $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$.

El siguiente teorema, que es conocido en geometría discreta dice que es posible esperar alguna relación entre teselaciones de zonótopos y configuraciones críticas. Su prueba, que se puede encontrar en [18], se omite aquí pues requiere herramientas avanzadas de teoría de polítopos.

Teorema 5.6. Todo zonótopo P tiene una teselación. Más aún, cada teselación de P tiene $|\mathcal{B}|$ paralelepípedos, donde \mathcal{B} es el conjunto de bases de la matroide generada por los vectores en las direcciones de los segmentos que generan P .

La idea entonces es mirar las teselaciones del Zonotopo generado por los vectores columna de A_G o de la matriz que genera $M(G)^*$ y hacer una correspondencia natural entre alguna familia de teselaciones y las configuraciones críticas.

Problema 5.7. Sea M una matroide generada por el espacio columna de la matriz A que tiene entradas reales con entradas reales. Existe una familia de teselaciones del Zonotopo Z generado por los segmentos contenidos entre el origen y los extremos de los vectores columna de A_G que está en biyección natural con las familias de configuraciones críticas \mathcal{C}_q al variar q entre los vértices de G .

Una de las cosas más interesantes de las teselaciones de zonotopos es que existen formas algorítmicas de producirlas. Una idea interesante es si este algoritmo que produce las

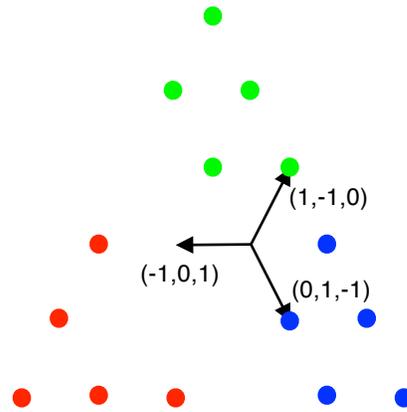
teselaciones tiene algo que ver con la forma en que las configuraciones se encuentran en la retícula.

Se espera que las propiedades geométricas del juego ayuden a encontrar tal biyección. A continuación se presentará un análisis detallado del juego en grafos de 3 vértices y una motivación para la conjetura en el caso en que G es un triángulo.

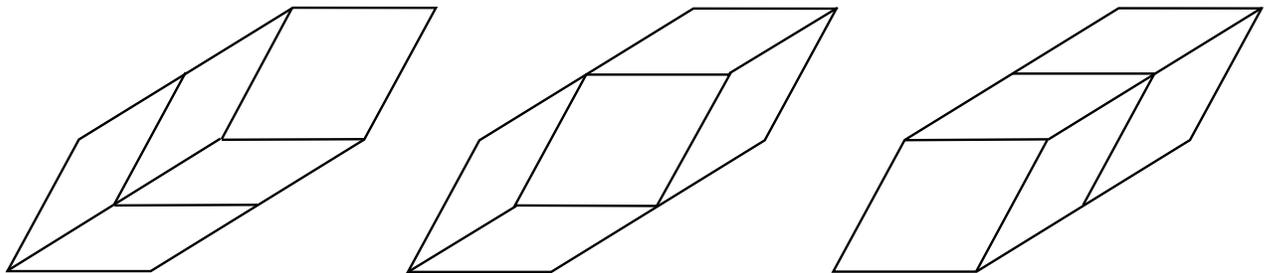
Ejemplo 5.8. Se considera el grafo $G = ([3], E, i)$ que no tiene loops y tiene a aristas uniendo $\{2, 3\}$, b aristas uniendo $\{3, 1\}$ y c aristas uniendo $\{1, 2\}$. Suponga que q es el vértice 1. Las configuraciones críticas minimales son $(-a, a, 0)$ y $(-a, 0, a)$, pues los ordenes para disparar son 2, 3 y 3, 2. La configuración maximal es $(-2a - b - c + 2, a + c - 1, a + b - 1)$. Esto quiere decir que el total de configuraciones es la cantidad de vectores $(-x - y, x, y)$ tales que $\min\{x, y\} \geq 0$, $\max\{x, y\} \geq c$, $x \leq a + c - 1$, $y \leq a + b - 1$. Esto es lo mismo que contar la cantidad de soluciones a $(0, 0) \leq (x, y) \leq (a + c - 1, a + b - 1)$ que es $(a + b)(a + c)$ y restarle el número de soluciones de $(0, 0) \leq (x, y) \leq (c - 1, c - 1)$ que es c^2 . Así que el número de configuraciones críticas es $ab + bc + ca$. Nótese que la cantidad de configuraciones es simétrica en a , b y c . La pregunta es como son las configuraciones al variar la escogencia de q .

El siguiente dibujo muestra las configuraciones críticas del grafo con $a = 2$ y $b = c = 1$. El plano dibujado es $x + y + z = 0$ en \mathbb{R}^3 y los puntos son los que tiene coordenadas enteras. Se consideran las tres posibilidades para q

- Si $q = 1$ las configuraciones críticas son $(-2, 2, 0)$, $(-2, 0, 2)$, $(-3, 2, 1)$, $(-3, 1, 2)$ y $(-4, 2, 2)$ y están pintadas de rojo en la figura.
- Si $q = 2$ las configuraciones críticas son $(1, -1, 0)$, $(0, -1, 1)$, $(1, -2, 1)$, $(0, -2, 2)$, $(1, -3, 2)$ y están pintadas con verde en la figura.
- Si $q = 3$ las configuraciones críticas son $(1, 0, -1)$, $(0, 1, -1)$, $(1, 1, -2)$, $(0, 2, -2)$, $(1, 2, -3)$ y están pintadas de azul en el dibujo.



El Zonotopo a considerar es la suma de Minkowski de los segmentos comprendidos entre el origen y los vectores $(1, -1, 0)$, $(0, 1, -1)$, $(0, 1, -1)$ y $(1, 0, -1)$. La siguiente figura muestra las tres teselaciones del zonotopo.



Lo que se busca es asociar de alguna forma estos tres zonotopos con los tres colores y producir un algoritmo reversible que a cada configuración crítica le asigne una teselación.

5.2. *L*-Polinomios

En esta sección se explicará una aproximación más algebraica a la conjetura.

Definición 5.9. Sea \mathbb{F} un campo. Se define el mapa $P : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ de modo que $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto P_{\mathbf{a}} := a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$.

Definición 5.10. Sea A una matriz con entradas en \mathbb{F} con multiconjunto de columnas $V = \{v_i\}_{i=1}^d$, $v_i \in \mathbb{F}^n$ y $R(A) = n$. Para cada $S \subset V$ se considera el polinomio $\mathcal{L}_S = \prod_{\mathbf{a} \notin S} P_{\mathbf{a}}$. Se define el espacio vectorial $U(V) := \text{span}\{\mathcal{L}_S \mid S \subset V, \text{span}\{S\} = \mathbb{F}^n\}$.

Nótese que todos los polinomios \mathcal{L}_S son homogéneos, luego $U(V)$ es un espacio vectorial graduado y se puede escribir como

$$U(V) = \bigoplus_{i=0}^{d-n} U_i(V)$$

donde $U_i(V) = \text{span}\{\mathcal{L}_S \in U(V), \mid \deg \mathcal{L}_S = i\}$.

Definición 5.11. Para un multiconjunto $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ de elementos de $[d]$ se define el L -polinomio de T como $L(T) := L_{t_1, t_2, \dots, t_n} := P(v_{t_1})P(v_{t_2}) \dots P(v_{t_k})$.

Es claro que los polinomios \mathcal{L} hacen parte de la familia de L -polinomios. El siguiente teorema, probado por Ardila y Postnikov en [1] dice que este espacio vectorial puede estar relacionado con la conjetura.

Teorema 5.12. Sea M la matroide generada por las columnas de A y sea $h^* = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_{d-n}^*)$ el h -vector de M^* . La dimensión de $U_i(V)$ con \mathbb{F} -espacio vectorial es h_i^* .

Nótese que este resultado tiene un sabor muy parecido al de Stanley con el que se prueba el teorema 3.5. Lo bueno de esta construcción es que el espacio vectorial se construye directamente sin necesidad de herramientas algebraicas complejas que hacen complicada su visualización. Calcular ejemplos en este caso resulta mucho más fácil, aunque sea necesario el uso de un computador.

La pregunta ahora es si existe alguna manera de construir un multicomplejo puro que esté relacionado con este espacio vectorial. Aparece la siguiente conjetura, que ha sido verificada computacionalmente para todas las matroides lineales con $|E| \leq 5$.

Definición 5.13. Sea $<$ un orden lineal sobre $[n]$ y sean T_1 y T_2 dos multiconjuntos de $[n]$ con la misma cantidad de elementos. Se dice que $L(T_1) < L(T_2)$ si T_1 es menor que T_2 en el orden lexicográfico inducido por $<$.

Conjetura 5.14 (Ardila). Existe un orden lineal en $[n]$ tal que si para $i \in [n - d]$ se construye la familia $L(T_1^i), L(T_2^i), \dots, L(T_{h_i^*}^i)$ de L -polinomios de grado i como la menor base lexicográfica de $U_i(V)$ formada por L -polinomios, entonces la familia $\{T_j^i\}_{i=0}^{d-n} \}_{j=1}^{h_i^*}$ es un multicomplejo puro.

Nótese que esta conjetura más el teorema 2.19 probarían la conjetura de Stanley para todas las matroides lineales. Christopher O’Neill desarrolló un programa para C++ que como entrada tiene las columnas de una matriz y como resultado imprime la menor base lexicográfica para orden de $[n]$ y dice cuales de esas bases forman un multicomplejo. Es de esta manera que se verificaron todos los casos pequeños. Desafortunadamente, el programa no sirve para muchas más matroides y los datos son complicados de analizar, pues la página de resultados de una matroide más o menos grande (6 o 7 elemento) tiene miles de páginas en word.

Sin embargo, las pruebas arrojan resultados sorprendentes. En todos los casos verificados hasta ahora el porcentaje de los ordenes que satisfacen la conjetura es mayor al 80 %. Poner un ejemplo completo e interesante de esto ocuparía demasiado espacio, luego se pondrá sólo un pedazo de un ejemplo para mostrar como se calculan las cosas. El siguiente ejemplo fue calculado por el programa de C. O’Neill.

Ejemplo 5.15. Sea M la matroide generada por las columnas v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los conjuntos cuyo complemento genera \mathbb{R}^3 son:

$$\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}$$

Los \mathcal{L} -polinomios asociados son entonces:

$$1, x, 2x, x + y, y, 2x^2, x^2 + xy, xy, 2x^2 + 2xy, 2xy$$

Luego se tiene que $U_0(V) = \text{span}(1)$, $U_1(V) = \text{span}(x, y)$ y $U_2(V) = \text{span}(x^2, xy)$. El programa dice que las bases con L -polinomios son:

- Para $U_0(V)$ la única base es $\{L_\emptyset\}$
- Para $U_1(V)$ las diferentes L -bases son:

$$\{L_1, L_3\}, \{L_1, L_4\}, \{L_2, L_3\}, \{L_2, L_4\}, \{L_3, L_4\}$$

- Para $U_2(V)$ las diferentes L -bases son:

$$\begin{aligned} &\{L_{1,1}, L_{1,3}\}, \{L_{1,1}, L_{1,4}\}, \{L_{11}, L_{2,3}\}, \{L_{1,1}, L_{2,4}\}, \{L_{1,2}, L_{1,3}\}, \{L_{1,2}, L_{1,4}\}, \\ &\{L_{1,2}, L_{2,3}\}, \{L_{1,2}, L_{2,4}\}, \{L_{1,3}, L_{1,4}\}, \{L_{1,3}, L_{2,2}\}, \{L_{1,3}, L_{2,4}\}, \\ &\{L_{1,4}, L_{2,2}\}, \{L_{1,4}, L_{2,3}\}, \{L_{2,2}, L_{2,3}\}, \{L_{2,2}, L_{2,4}\}, \{L_{2,3}, L_{2,4}\} \end{aligned}$$

Las bases acá están ordenadas lexicográficamente si se asume que $1 < 2 < 3 < 4 < 5$. En este caso la menor base de $U(V)$ es $L_\emptyset, L_1, L_3, L_{11}, L_{13}$. Nótese que si se miran los índices de los polinomios se tiene un multicomplejo puro. Esto es lo que predice la conjetura. Una pregunta que surge es si cualquier orden funciona. Sin embargo la respuesta a esto es falso.

El orden $4 < 5 < 3 < 2 < 1$ da la base $L_\emptyset, L_3, L_4, L_{2,3}, L_{2,4}$. Los subíndices de los polinomios de esta base no forman un multicomplejo.

En este caso en particular, 103 de los ordenes producen multicomplejos puros. Esto es aproximadamente el 85% de los órdenes posibles.

Parece ser que el problema grande que hay para probar esta conjetura es que la familia de multiconjuntos que se obtiene no es necesariamente cerrada bajo inclusión. Esto pues muchas de los posibles elementos de los multiconjuntos no aparecen como elementos entre los índices de la base de $U_1(V)$. Esto pasa en todos los ejemplos de órdenes que fallan que se han hecho hasta ahora. Sin embargo, los resultados obtenidos computacionalmente son muy positivos y esperamos solucionar la conjetura usando esta idea en un plazo corto.

Referencias

- [1] F. Ardila y A. Postnikov *Combinatorics and Geometry of Power Ideals*. Transactions of the American Mathematical Society. Volume 362. Number 8. Páginas 4357-4384. 2010
- [2] F. Ardila y C. O’Neil. *Constructing a pure multicomplex from the bases of a polynomial vector space for a linear matroid (working draft)*.
- [3] M. Baker y S. Norine. *Riemann Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph*. Advances in mathematics. Volúmen 208. Páginas 766-788. 2007
- [4] N. Biggs. *Chip firing and the critical group of a graph*. Journal of Algebraic Combinatorics. 9(1). Páginas 25–45, 1999.
- [5] A. Björner. *Homology and Shellability of Matroids and Geometric Lattices*. In N. White, editor, *Matroid Applications*. Cambridge University Press, 1992.
- [6] T. Brylawski y J. Oxley *The Tutte polynomial and its applications*. In N. White, editor, *Matroid Applications*. Cambridge Univ. Press, 1992.
- [7] H. Hà, E. Stokes y F. Zanello. *Pure O-sequences and matroid h-vectors*. Preprint. Arxiv: 1006.0325
- [8] C. Haase, G. Musiker y J. Yu. *Linear Systems on Tropical Curves*. Preprint. Arxiv: 0909.3685
- [9] C. Merino. *Chip firing game and the Tutte polynomial*. Annals of Combinatorics 1. Springer Verlag. Páginas 253-259. 1997.
- [10] C. Merino. *Chip firing game and Matroid Complexes*. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science Proceeding. Páginas 245-256, 2001
- [11] C. Merino, S. Noble, M. Ramírez-Ibañez y R. Villarroel. *On the structure of the h-vector of a paving matroid*. Preprint. Arxiv:1008.2031.
- [12] S. Oh. *Generalized permutohedra, h-vector of cotransversal matroids and pure O-sequences*. ArXiv: 1005.5586v2. 2010

-
- [13] J. Oxley. *Matroid Theory*. Oxford Science Publications. Oxford Graduate Texts in Mathematics. 2001
- [14] A. Postnikov, *Permutohedra, associahedra, and beyond*. preprint. Arxiv:0507163.
- [15] R. Stanley. *Cohen-Macaulay Complexes*. In M. Aigner, editor, Higher Combinatorics. Reidel, Dordrecht/Boston. 1977
- [16] R. Stanley. *The Upper Bound Conjecture and Cohen-Macaulay Rings*. Studies in Applied Math. Volume 54, Páginas 135-142. 1975
- [17] R. Stanley. *Combinatorics and Commutative Algebra*. Progress in Mathematics. Birkhäuser. Second Edition. 1996
- [18] G. Ziegler. *Lectures on polytopes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. Revised First Edition. 1997