Hemtal till kursen "Elementär Differentialgeometri", del 2

Problem 7: Spivak I, 4.1.
Problem 8: Spivak I, 7.4.
Problem 9: Spivak I, 7.27.
Problem 10: Spivak I, 8.7
Problem 11: Volymform på S^n. [Jämför med Spivak I, problem 9.13] Låt

$$S^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = r^2\}$$

vara standard sfären av radie r. Definiera n form ω genom

$$\omega = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^{n+1}$$

(a) Bevisa att ω definierar en orientering på S^n.
(b) Beräkna $\int_{S^n(1)} \omega$ (se Spivak I, problem 9.14). Är ω exakt?
(c) Låt $r : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ vara definierad av $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2}$. Visa att

$$dr \wedge \omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n+1}.$$

Problem 12: Orientabilitet för $\mathbb{RP}^n$. Låt $S^n = S^n(1)$ vara som i Problem 11. Låt $i : S^n \to S^n$ vara reflektion definierad av

$$i(x^1, \ldots, x^{n+1}) = (-x^1, \ldots, -x^{n+1}).$$

Definiera en ekvivalensrelation $x \sim y$ genom $x \sim y$ om $y = i(x)$. Då kan vi definiera projektion $\pi : S^n \to S^n/\!\sim\, = \mathbb{RP}^n$ från S^n till $\mathbb{RP}^n$.
(a) Visa att

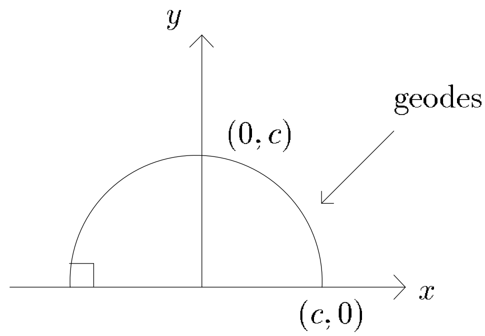
$$\begin{aligned} i^*\omega &= \omega \text{ om } n \text{ udda.} \\ i^*\omega &= -\omega \text{ om } n \text{ jämn.} \end{aligned}$$

(b) Visa att $\mathbb{RP}^n$ är orienterbar om och endast om n är udda. [Ledning: använd π för att flytta former mellan $\mathbb{RP}^n$ och S^n.]
Problem 13: Spivak I, 8.13.
Problem 14: Geodeser på övre halvplanet. Spivak, I, 9.41, a) – d). [Ledning: se fig. 1]. Observera att med parametrisering av geodesen $(t, \gamma(t))$ har vi formeln

$$\gamma'' = -\frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma'^2}{\gamma}$$

(feltryck i Spivak tror jag). Kom ihåg att $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$. Notera att vi har translationsinvarians m.a.p. x.]

Lars Andersson



FIGUR 1. Övre Halvplanet