

Hemtal till kursen "Elementär Differentialgeometri", del 3

Problem 15: Bevisa algebraens fundamentalsats m.h.a. satsen om avbildningsgrad, jfr. Spivak, problem I.8.21 och I.8.22.

Problem 16: (a) Visa att Gauss krökningen K på enhetsfären uppfyller $K \equiv 1$, genom att använda formeln $K = k_1 k_2$ där k_1, k_2 är principalkrökningarna, d.v.s. egenvärdena till 2:a fundamentalformen.

(b) Låt ϕ, θ vara sfäriska koordinater på enhetsfären i \mathbb{R}^3 , d.v.s $x = \sin(\phi) \cos(\theta)$, $y = \sin(\phi) \sin(\theta)$, $z = \cos(\phi)$. Kontrollera genom en explicit räkning att Gauss vinkelrelation

$$\int_{\angle ABC} K dA = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$$

gäller, t.e.x. för geodetiska trianglar av formen $0 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq \theta \leq \theta_0$. Det är tillåtet att använda att $K \equiv 1$.

Problem 17: Torsionstensorn T (s. II.254) och Riemanns krökningstensor R (s. II.258) definieras av

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

där X, Y, Z är vektorfält. Bevisa att T och R är tensorer.

Ledning: Visa att R och T är linjära över

$C^\infty(M)$, d.v.s. visa t.ex. att för varje $f \in C^\infty(M)$, gäller

$$R(fX, Y)Z = R(X, fY)Z = R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z$$

Detta visas med hjälp av egenskaperna hos ∇ (se kapII.pdf på kursens hemsida eller Spivak) och $[X, Y]$ (se kap5.pdf på kursens hemsida, eller använd definitionen $[X, Y]h = X(Yh) - Y(Xh)$).

Problem 18: Cartan's strukturekvation i termer av ∇ : Låt X_1, \dots, X_n vara ortonormerad ram på Riemannsk mångfald $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ och låt θ^i vara de duala 1-formerna. Låt ∇ vara den unika symmetriska¹ kompatibla² förbindelsen på M och låt R vara dess Riemantensor, se s. II.258.

Låt $\omega_j^i(Z) = \theta^i(\nabla_Z X_j) = \langle X_i, \nabla_Z X_j \rangle$ definiera förbindelseformerna för ∇ . Cartan's formalism och strukturekvationerna diskuteras i Kap. II.7, men i lösningen till denna uppgift vill jag ha argument som utgår direkt från definitioner i termer av $\langle \cdot, \cdot \rangle$ och ∇ .

(a) Bevisa att $\omega_j^i = -\omega_i^j$

(b) Låt α 1-form och X, Y vektorfält. Bevisa att

$$X\alpha(Y) - Y\alpha(X) = d\alpha(X, Y) + \alpha([X, Y])$$

(c) Bevisa att

$$\theta^i(R(X_k, X_\ell)X_j) = d\omega_j^i(X_k, X_\ell) + \sum_m \omega_m^i \wedge \omega_j^m(X_k, X_\ell)$$

direkt från definitionen av R och bevisa därmed Cartan's andra struktureformel

$$d\omega_j^i = - \sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \Omega_j^i$$

¹torsionsfria

²metriska

med

$$\Omega_j^i(X_k, X_\ell) = \theta^i(R(X_k, X_\ell)X_j)$$

jfr. s. II.297.

Problem 19: Betrakta övre halvplanet $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ med metrik $\frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{y^2}$ och låt K vara Gauss-krökningen. Bevisa, t.ex. m.h.a. resultatet från problem 18 att $K \equiv -1$, d.v.s. $\langle R(X, Y)Y, X \rangle \equiv -1$ för ortonormerade X, Y .

Lars Andersson