

## Kapitel 7 Differentialformer.

Vi hoppar över materialet om Lie-derivata i kap. 5 och Frobenius sats i kap. 6, vi kommer tillbaka till Lie-derivatan senare. Vi hoppar även över det material i kapitel 7 som har med Frobenius sats att göra.

**Alternierande tensorer:** Låt  $V$  vara vektorrum av dimension  $n$  över  $\mathbb{R}$  och låt  $T \in \mathcal{T}^k(V)$ .  $T$  sägs vara *alternierande* (skevsymmetrisk) om

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k)$$

eller ekvivalent om  $T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sign}(\sigma)T(v_1, \dots, v_k)$ .

Vi använder notationen  $\Omega^k(V) = \{T \in \mathcal{T}^k(V), T \text{ alternierande}\}$ .

Om  $f : V \rightarrow W$  linjär gäller att  $f^* \mathcal{T}^k(W) \rightarrow \mathcal{T}^k(V)$  inducerar avbildning  $f^* : \Omega^k(W) \rightarrow \Omega^k(V)$ .

Låt  $T \in \mathcal{T}^k(V)$ . Definiera

$$\text{Alt}T(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

Alt blir projektion  $\mathcal{T}^k(V) \rightarrow \Omega^k(V)$ , d.v.s. Alt linjär och  $\text{Alt}(\text{Alt}(T)) = \text{Alt}(T)$ . Speciellt om  $\omega \in \Omega^k(V)$  gäller  $\text{Alt}(\omega) = \omega$  (Prop. 1).

**Wedge produkt:** Låt  $\omega \in \Omega^k(V)$ ,  $\eta \in \Omega^\ell(V)$ , Definiera  $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+\ell}(V)$  genom

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta)$$

D.v.s.  $\wedge$  blir den antisymmetriserade tensorprodukten. Normaliseringen ovan gör att  $\wedge$  blir associativ (Thm 2.).

**Egenskaper:** Låt  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$  bas för  $V$ ,  $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^n\}$  dual bas. Då är

$$(1) \quad \{\epsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \epsilon^{i_k}, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

bas för  $\Omega^k(V)$ . Detta gäller ty  $\epsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{i_k}$  bas för  $\mathcal{T}^k(V)$  och därför spänner  $\text{Alt}(\epsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{i_k})$  som är av formen (1) upp  $\Omega^k(V)$ . Ser att (Thm. 3)

$$\dim \Omega^k(V) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Obs. att  $\Omega^0(V) = \mathbb{R}$ ,  $\Omega^1(V) = V^*$ ,  $\dim \Omega^n(V) = 1$ .

Vidare, om  $\omega \in \Omega^k(V)$ ,  $\eta \in \Omega^\ell(V)$ ,

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \eta \wedge \omega$$

(ser detta genom att betrakta  $\epsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \epsilon^{i_k} \wedge \epsilon^{j_1} \wedge \dots \wedge \epsilon^{j_\ell}$  räkna teckenbyten när man successivt permuterar elementen).

Låt  $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Omega^1(V) = V^*$ . Då gäller att  $\{\omega_1, \dots, \omega_k\}$  är linjärt oberoende  $\Leftrightarrow \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k \neq 0$ . (Cor. 4.)

**Determinanten:** Låt  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ . Då kan vi betrakta  $\det(a_1 \dots a_n)$  (determinanten av matrisen med kolonner  $a_1, \dots, a_n$ ) som ett element i  $\Omega^n(\mathbb{R}^n)$ , som enligt ovan har dimension 1.

Nu ser man att om  $v_1, \dots, v_n$  bas för  $V$ ,  $w_i = \sum \alpha_{ji} v_j$ ,  $\omega \in \Omega^n(V)$  då har vi

$$\omega(w_1, \dots, w_n) = \det(\alpha_{ij}) \omega(v_1, \dots, v_n)$$

(Thm. 5.)

**Differentialformer på  $M$ :** Bunt  $\Omega^k(TM)$  bildas på naturligt sätt. Sektioner  $C^\infty(\Omega^k(TM))$  kallas  $k$ -former. Låt  $\omega, \eta$   $k$ -form resp.  $\ell$ -form. Då har vi naturligt definierad  $k + \ell$ -form  $\omega \wedge \eta$ .

Låt

Låt  $f : M \rightarrow N$ ,  $\omega \in C^\infty(\Omega^k(TN))$ , då har vi tillbakadragningen  $f^*\omega \in C^\infty(\Omega^k(TM))$ ,  $k$ -form på  $M$ . Vidare

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$$

Låt  $(x, U)$  vara koordinat system vid  $p \in M$ . Då är  $\{dx^i(p)\}_{i=1}^n$  bas för  $M_p^*$ , d.v.s.

$$\{dx^{i_1}(p) \wedge \dots \wedge dx^{i_k}(p), 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

blir bas för  $\Omega^k(M_p)$ . D.v.s.  $k$ -form  $\omega$  kan skrivas

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum \omega_I dx^I$$

där vi har använt multiindex notation  $I = i_1 \dots i_k$ .

**Tätheter på  $M$ :** Låt  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  vara  $C^\infty$ , låt  $\{x^i\}$  vara kartesiskt koordinat-system på  $\mathbb{R}^n$  och låt  $\det Df$  vara Jakobianen till  $f$ . Då gäller p.g.a. ovan att  $f^*dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = (\det Df) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ . Detta känner man igen som formeln för transformation av volymselement.

Det analoga formeln på mångfalden är följande: Låt  $M, N$  vara  $C^\infty$  mångfalden av dimension  $n$ , låt  $f : M \rightarrow N$  vara  $C^\infty$ , låt  $(x, U)$  koord. syst. vid  $p \in M$ ,  $(y, V)$  koord. syst. vid  $q = f(p) \in N$ . Då gäller

$$f^*(gdy^1 \wedge \dots \wedge dy^n) = (g \circ f) \det \left( \frac{\partial y^i \circ f}{\partial x^j} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Om vi tillämpar detta på koordinatbyte får vi att

$$gdy^1 \wedge \dots \wedge dy^n = hdx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

endast om  $h = g \det \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)$ , D.v.s. sektion av  $\Omega^n(TM)$  definerar "täthet" på  $M$ .

**Orientering:** Vi kan nu definiera en orientering av  $M$  som en sektion av  $\Omega^n(TM)$  som är skild från 0.  $M$  sägs vara orienterbar om det finns en orientering på  $M$ .

Obs. att detta är ekvivalent med tidigare begrepp för orientering, jfr. Kap. 3, s. 117 ff.

**Yttre derivata:**  $f \in C^\infty(M)$  kan betraktas som 0-form, dvs. sektion av  $\Omega^0(TM)$ . Vidare  $df \in C^\infty(\Omega^1(TM))$  är 1-form. Man kan definiera en (anti-)derivation  $d : C^\infty(\Omega^k) \rightarrow C^\infty(\Omega^{k+1})$  genom

$$d\omega = \sum \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$d$  kallas yttre derivata och har följande egenskaper:

1.  $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$
2. Om  $\omega_1$   $k$ -form,  $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$
3.  $d(d\omega) = 0$  (d.v.s  $d^2 = 0$ ).

Man kan visa att  $d$  är specificeras unikt av egenskapen att  $df$  är "den gamla vanliga" och ovanstående.

$d$  är naturlig, d.v.s.  $f^*d\omega = d(f^*\omega)$ . (Prop. 16)

**Poincarés Lemma:** Om  $\omega = d\eta$  för ngt.  $\eta$  kallas  $\omega$  *exakt* och om  $d\omega = 0$  kallas  $\omega$  *sluten*.

P.g.a.  $d^2 = 0$  gäller  $\omega$  exakt  $\Rightarrow \omega$  sluten. Lokalt gäller även omvändningen p.g.a. Poincarés Lemma som säger att om  $k$ -form  $\omega$  är sluten, d.v.s.  $d\omega = 0$  så finns till varje  $p \in M$  en omgivning  $V$  och en  $(k-1)$ -form  $\eta$  definierad på  $V$  så att

$$\omega = d\eta$$

på  $V$ . Jag kommer att ge beviset av Poincaré's lemma enligt Problem 23, Kap. 7.

OBS. att detta gäller ej globalt. I själva verket kan man definiera

$$H^k = \frac{\{\text{slutna } k\text{-former}\}}{\{\text{exakta } k\text{-former}\}}$$

detta ger den s.k. deRham kohomologin, och mäter s.a.s. bristen på exakthet hos slutna former. Under vissa förutsättningar kan man betrakta operatorm  $d$  som dualen till randoperatorm i den singulära homologin.

Det grundläggande exemplet på en sluten men ej exakt form ges av

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

på  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

**Problem, Kap 7:** 4,9,12,20,21,27