

Kapitel 5 Lie-derivatan. Det relevanta materialet finns på s. 203-215.

Låt M vara C^∞ mångfald. Ett flöde på M är en en-parameter grupp av diffeomorfier på M , d.v.s. en samling diffeomorfier $\phi_t : M \rightarrow M$, $t \in \mathbb{R}$ så att

$$\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t.$$

Låt X vara vektorfält på M . $\{\phi_t\}$ är ett flöde m.a.p. (genererat av) X om

$$\frac{d}{dt}\phi_t = X \circ \phi_t,$$

d.v.s. $\phi_t(p)$ löser system av ODE definierat av X (som ju kan betraktas som ett riktningsfält).

I allmänhet finns inte ett globalt flöde genererat av X . Man kan hitta exempel på \mathbb{R}^n där trajektorerna $\phi_t(p)$ divergerar efter en ändlig tid som blir godtyckligt liten när p varierar. Från den allmänna teorin för ODE (Picards sats + differentierbarhet + inversa funktionssatsen) följer dock att ett lokalt flöde existerar vid varje p . Detta är Thm. 5. Speciellt om M är kompakt eller om X har kompakt stöd genererar X globalt flöde.

Låt (x, U) vara koordinat system vid $p \in M$ och låt $f \in C^\infty(M)$. Då kan vi skriva $X = \sum_i X^i \partial_{x^i}$ och $Xf = df(X) = \sum_i X^i \partial f / \partial x^i$ kan uttryckas m.h.a. flödet ϕ_t m.a.p. X ,

$$Xf(q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* f(q) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\phi_t(q)) - f(q)}{t}$$

Nu har vi Xf i termer av ϕ_t . Men ϕ_t verkar på andra objekt genom tillbakadragning (pullback) så vi inför notation $\mathcal{L}_X f = Xf$ och definierar \mathcal{L}_X (Lie-derivatan m.a.p. X) på andra objekt genom att använda ϕ_t .

Om ω 1-form, definiera

$$\mathcal{L}_X \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* \omega$$

Låt Y vektorfält på N , η 1-form på N . Då transformeras $\eta(Y)$ som funktion och vi använder detta för att definiera tillbakadragning på vektorfält. Låt $\psi : M \rightarrow N$ vara diffeomorfism. Definiera vektorfält $\psi^* Y$ på M genom

$$\begin{aligned} \eta_{\psi(p)}(Y_{\psi(p)}) &= \psi^*(\eta(Y))_p \\ &= (\psi^* \eta_p)(\psi^* Y_p) \\ &= \eta_{\psi(p)}(\psi_* \psi^* Y_p) \end{aligned}$$

vilket ger $\psi_* \psi^* Y_p = Y_{\psi(p)}$ eller mera explicit,

$$\psi^* Y(p) = \psi_*^{-1}(p) Y(\psi(p))$$

Om X, Y vektorfält på M , ϕ_t flödet m.a.p. X , definiera

$$\mathcal{L}_X Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* Y$$

\mathcal{L}_X är derivation (Prop. 8). D.v.s. t.ex. om ω 1-form, Y vektorfält,

$$\mathcal{L}_X(\omega(Y)) = (\mathcal{L}_X\omega)(Y) + \omega(\mathcal{L}_XY)$$

Bevis:

$$\mathcal{L}_X\omega(Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^*(\omega(Y)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi_t^*\omega)(\phi_t^*Y)$$

och produktregeln.

På samma sätt om $f \in C^\infty(M)$ visas

$$\mathcal{L}_X(Yf) = (\mathcal{L}_XY)f + Y(\mathcal{L}_Xf)$$

Bevis: använd

$$\phi^*(Yf) = \phi^*(df(Y)) = \phi^*(df)(\phi^*Y) = d\phi^*f(\phi^*Y) = \phi^*Y\phi^*f$$

(Jfr. problem 11) och argumentera som ovan.

Nu ser vi att

$$(\mathcal{L}_XY)f = \mathcal{L}_X(Yf) - Y(\mathcal{L}_Xf) = X(Yf) - Y(Xf) = [X, Y]f$$

D.v.s. vi har bevisat

$$\mathcal{L}_XY = [X, Y]$$

Lie derivatan på vektorfält ger Lie-parentes (Lie-bracket).

En enkel räkning visar

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

(Jacobi identiteten – \mathcal{V} blir därigenom Lie-algebra) och¹

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

Detta visar speciellt att $[\cdot, \cdot]$ INTE är en tensor.

I koordinater har vi räknat ut

$$[X, Y] = \sum_{ij} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \partial_{x^j}$$

vilket ger

$$\mathcal{L}_X \partial_{x^i} = \sum_j -\frac{\partial X^j}{\partial x^i} \partial_{x^j}$$

Genom $dx^i(\partial_{x^j}) = \delta_j^i$ och \mathcal{L}_X derivation får vi

$$0 = \mathcal{L}_X dx^i(\partial_{x^j}) = (\mathcal{L}_X dx^i)(\partial_{x^j}) + dx^i(\mathcal{L}_X \partial_{x^j})$$

¹observera teckenfelet i boken, jfr listan med korrekturer i slutet av boken

vilket ger

$$\mathcal{L}_X dx^i = \sum_j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} dx^j$$

Vidare ser man att \mathcal{L}_X kommuterar med kontraktion (jfr. Kap. 5, problem 14 d) (detta följer av att den är derivation). Eftersom \mathcal{L}_X är derivation kan vi utvidga verkan till godtyckliga tensorfält.

Yttre derivatan d är naturlig (Kap. 7, Proposition 16) \Rightarrow genom definitionen av \mathcal{L}_X att om ω k -form gäller

$$\mathcal{L}_X d\omega = d\mathcal{L}_X\omega$$

Jfr. Kap 7, Problem 18: Från definitionen av \mathcal{L}_X ser vi följande:

a) ω k -form $\Rightarrow \phi^*\omega$ k -form $\Rightarrow \mathcal{L}_X\omega$ k -form.

b) $\phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \phi^*\omega_1 \wedge \phi^*\omega_2$ (jfr. s.282) \Rightarrow

$$(1) \quad \mathcal{L}_X\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \mathcal{L}_X\omega_2$$

Inre produkt på former: Låt ω k -form, definiera $(k-1)$ -form $i_X\omega$ genom

$$i_X\omega(Y_1, \dots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{k-1})$$

(Jfr. Kap. 7, problem 4). Obs. att om ω 0-form (d.v.s. funktion) definieras $i_X\omega = 0$. Denna i_X är *antiderivation*: låt ω_1 k -form, då gäller

$$i_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = (i_X\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge i_X\omega_2.$$

P.s.s. är yttre derivatan d antiderivation, se Kap. 7, Prop. 10. Nu visar det sig genom en enkel räkning att $i_X \circ d + d \circ i_X$ är *derivation* på former, d.v.s. uppfyller (1) precis som \mathcal{L}_X .

Nu kan vi bevisa följande vackra formel (Jfr. Kap. 7, problem 18 e):

$$\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X$$

på k -former eller $\mathcal{L}_X\omega = i_X(d\omega) + d(i_X\omega)$. Eftersom vi arbetar med derivationer räcker det med att kontrollera formeln för ω funktion eller ω 1-form. $\omega = f$ ger (ty $i_X f = 0$)

$$i_X df + d i_X f = i_X df = df(X) = Xf = \mathcal{L}_X f$$

$\omega = df$ ger (ty $d^2 = 0$)

$$i_X d(df) + d(i_X df) = d\mathcal{L}_X f = \mathcal{L}_X df$$

Detta tillsammans med det faktum att \mathcal{L}_X är derivation bevisar formeln.

Observera till sist formeln för verkan av \mathcal{L}_{fX} på allmänna tensorfält som beskrivs i Kap. 5, problem 15.

Problem, Kap. 5: 10,11,12,13,14,15 **Kap. 7:** 4,18