

Kapitel 4 Tensorer . korrigerad version

Låt V vara vektorrum över kropp \mathbb{F} av dimension n med bas e_1, \dots, e_n . Kom ihåg att $V^* = \{\lambda : V \rightarrow \mathbb{F}, \lambda \text{ linjär}\}$ är det *duala rummet till V* . Kalla den duala basen e^{1*}, \dots, e^{n*} . Obs. att $V^{**} = V$ (reflexivitet) gäller alltid när V är ändligt dimensionellt.

Låt U, V, W vara vektorrum. Låt $f : V \rightarrow W$ vara linjär. Då kan vi definiera den duala avbildningen $f^* : W^* \rightarrow V^*$ genom $f^*w^*(v) = w^*(fv), \forall w^* \in W^*, v \in V$. Om $g : U \rightarrow V$ linjär har vi $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Låt $\xi = \pi : E \rightarrow B$ vektorbunt med fiber V . Då kan vi definiera dual bunt $\xi^* = \pi' : E' \rightarrow B$ med fiber V^* genom $E' = \cup_{p \in B} [\pi^{-1}(p)]^*$ och π' motsvarande projektion.

Tillämpa detta på TM , då får vi T^*M , *kotangentbunten*.

Obs. att $\mathcal{F} = C^\infty(M)$ är abelsk ring, Mängden av sektioner $C^\infty(\xi)$ är en abelsk grupp, och \mathcal{F} verkar på $C^\infty(\xi)$ genom multiplikation. Därför blir $C^\infty(\xi)$ en \mathcal{F} -modul. D.v.s. vi kan tala om linearitet över \mathcal{F} !

Ex: $s \in C^\infty(\xi^*)$ kan betraktas som \mathcal{F} -linjär avbildning $s : C^\infty(\xi) \rightarrow \mathcal{F}$ på följande sätt: låt $u_1, u_2 \in C^\infty(\xi)$ vara sektioner av ξ och låt $f \in \mathcal{F}$. Då gäller $s(fu_1 + u_2) = fs(u_1) + s(u_2)$. Här är $s(u_1)(p) = s(p)(u_1(p)) \in \mathbb{R}$. D.v.s. rummen av sektioner är duala i den naturliga meningen.

Tensorprodukt: Låt V_1, \dots, V_k vara vektorrum över \mathbb{F} . En avbildning $T : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow \mathbb{F}$ kallas *multilinjär* om $\forall v_1, \dots, v_k \in V_1 \times \dots \times V_k, \forall i : 1 \leq i \leq k$, avbildningen $v \mapsto T(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_k)$ är linjär, d.v.s. om T är linjär i varje argument separat. Mängden av såna multilinjära avbildningar kallas tensorprodukten $V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$.

Låt $S \in V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*, T \in V_{k+1}^* \otimes \dots \otimes V_{k+\ell}^*$, definiera $S \otimes T \in V_1^* \otimes \dots \otimes V_{k+\ell}^*$ genom

$$S \otimes T(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+\ell}) = S(v_1, \dots, v_k)T(v_{k+1}, \dots, v_{k+\ell}).$$

\otimes är linjär och associativ men *ej* kommutativ.

Ex: $\mathcal{T}^k(V) = V^* \otimes \dots \otimes V^*$ (k kopior), har bas $\{e^{i_1*} \otimes \dots \otimes e^{i_k*}\}, 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, d.v.s. $\dim \mathcal{T}^k(V) = n^k, \dim \bigotimes_{i=1}^k V_i = \prod_{i=1}^k \dim V_i$.

Blandade tensorprodukter $\mathcal{T}_\ell^k(V)$ bildas genom tensorprodukt med k V^* -faktorer och ℓ V -faktorer. Om $S \in \mathcal{T}_\ell^k(V), T \in \mathcal{T}_{\ell'}^{k'}(V), S \oplus T \in \mathcal{T}_{\ell+\ell'}^{k+k'}(V)$.

Ex: $\mathcal{T}_1^1(V) = \text{End}(V)$

Tensorprodukt av buntar: Givet buntar $\xi_i, i = 1, 2$ över M med fiber V_i bildar man ny bunt $\xi_1 \otimes \xi_2$ över M med fiber $V_1 \otimes V_2$. Detta leder till tensorbuntar över M , t.ex. $\mathcal{T}^k(TM)$ (kovarianta tensorer av ordning k , fiber $\mathcal{T}^k(M_p)$) eller $\mathcal{T}_\ell^k(TM)$, fiber $\mathcal{T}_\ell^k(M_p)$. Obs: $\mathcal{T}_1^1(TM) = \text{End}(TM)$ (bunt-avb.) och identitetsavbildningen i $\text{End}(TM)$ ges av $\sum \delta_j^i dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$.

Låt (x, U) karta vid $p \in M$. En bas för $\mathcal{T}^k(M_p)$ ges av $dx^{i_1}(p) \otimes \dots \otimes dx^{i_k}(p), 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$. D.v.s. låt A sektion av $\mathcal{T}^k(TM)$ över U , då kan A uttryckas som

$$A = \sum A_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}$$

där A_{i_1, \dots, i_k} är en samling n^k funktioner.

Låt (x', V) vara ny karta vid p med $A = \sum A'_{i_1, \dots, i_k} dx'^{i_1} \otimes \dots \otimes dx'^{i_k}$. P.g.a. kedjeregeln $dx^i = \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} dx'^j$ så

$$A'_{i_1, \dots, i_k} = \sum A_{j_1, \dots, j_k} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{j_k}}{\partial x'^{i_k}}$$

Låt $\mathcal{V} = C^\infty(TM)$ beteckna rummet av vektorfält, detta är en modul över \mathcal{F} . Kovariant tensorfält av ordning k svarar precis emot multilinjära (över \mathcal{F}) avbildningar $\mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{F}$ (Thm. 2).

Vi har alltså flera olika sätt att beskriva tensorfält:

1. sektion av bunt, t.ex. $\mathcal{T}^k(TM)$.
2. multilinjär avbildning (över \mathcal{F}).
3. samling funktioner t.ex. A_{i_1, \dots, i_k} def. m.a.p. karta (x, U) med transformationsregler för övergång till ny karta.

Operationer på tensorer: Vi har redan tittat på tensorprodukt. Kontraktion $C : \mathcal{T}_\ell^k(V) \rightarrow \mathcal{T}_{\ell-1}^{k-1}(V)$ definieras genom

$$CT(v_1, \dots, v_{k-1}, v_1^*, \dots, v_{\ell-1}^*) = \sum T(v_1, \dots, e_i, \dots, v_{k-1}, v_1^*, \dots, e^{i*}, \dots, v_{\ell-1}^*).$$

Obs. notationen avsikligen vag här, för att fullständigt definiera kontraktionen måste man ange exakt vilka positioner e_i och e^{i*} har. Detta görs ofta lättast m.h.a. indexnotation.

Anm: $A \in \mathcal{T}_1^1(V) = \text{End}(V)$, $CA = \text{tr}A = \text{spåret av } A$ betraktad som linjär endomorfism av V .

Tillbakadragning av kovariant tensor: Låt $f : M \rightarrow N$ vara C^∞ , låt T vara sektion av $\mathcal{T}^k(TN)$. Då kan vi definiera en sektion f^*T av $\mathcal{T}^k(TM)$ genom $f^*T(X_1, \dots, X_k) = T(f_*X_1, \dots, f_*X_k)$.

Symmetri och antisymmetri hos tensorer: $T \in \mathcal{T}^k(V)$ är symmetrisk om

$$T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = T(v_1, \dots, v_k)$$

för varje permutation σ av $1, \dots, k$. Analogt för tensorfält.

Ex: En symmetrisk tensor $g \in C^\infty(\mathcal{T}^2(TM))$ (symmetrisk kovariant 2-tensor) kallas Riemannsk metrik om $g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ där g_{ij} är en positivt definit matris (detta är oberoende av val av koordinatsystem). Detta är ekvivalent (för symmetriska g) med att $\forall X \in \mathcal{V}, p \in M, g(X, X)_p \geq 0$ och $g(X, X)_p = 0 \Rightarrow X(p) = 0$. Man använder ofta beteckningen $\langle X, Y \rangle$ i.s.f. $g(X, Y)$.

$T \in \mathcal{T}^k(V)$ är antisymmetrisk (alternerande, skevsymmetrisk) om

$$T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sign}(\sigma)T(v_1, \dots, v_k)$$

för varje permutation σ av $1, \dots, k$. Buntten av antisymmetriska kovarianta k -tensorer betecknas $\Omega^k(TM)$. Sektioner av denna brukar kallas differentialformer.

Problem, Kap 4: 1,5,7,8,10