Kapitel 3 Tangentrum, tangentbunten.

Tangentrum till $\mathbb{R}^n$ (s. 86–88): Om vi betraktar en kurva c i $\mathbb{R}^n$, är det naturligt att $c'(t)$ ses som en vektor på $\mathbb{R}^n$ baserad vid $p = c(t)$ i stället för vid origo, d.v.s. vid varje $p \in \mathbb{R}^n$ har vi ett rum av vektorer "baserade vid p", kalla det tangentrummet till $\mathbb{R}^n$ vid p som betecknas $\mathbb{R}^n_p$.
Det är nu naturligt att definiera $T\mathbb{R}^n = \cup_{p\in\mathbb{R}^n}\mathbb{R}^n_p$, man ser att $T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (homeomorft) och att det finns en naturlig projektion $\pi : T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ så att $\pi^{-1}(p) \cong \mathbb{R}^n$. Dvs. vi har en $\mathbb{R}^n$–bunt. Man kan visa att $T\mathbb{R}^n$ är en $2n$-dimensionell C^∞ mångfald på ett naturligt sätt. Ett vektorfält på $\mathbb{R}^n$ är en *sektion* av $T\mathbb{R}^n$, d.v.s. en avbildning $X : \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n$ så att $X(p) \in \mathbb{R}^n_p$, d.v.s. $\pi \circ X = \mathrm{id}$.

Pushforward (s. 89-92): Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara C^∞, $p \in \mathbb{R}^n$, definierar Df (Frechet derivatan till f) en avbildning $f_* : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^m_{f(p)}$, denna kallas *pushforward* (finns det någon svensk term??) genom $f_*v_p = Df(p)v_p$ för $v_p \in \mathbb{R}^n_p$.
Ex: låt 1_t beteckna "standard tangent vektor till $\mathbb{R}$, låt $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ vara kurva i $\mathbb{R}^n$, då har vi $c'(t) = c_* 1_t \in \mathbb{R}^n_{c(t)}$.
Man ser att för $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ har vi $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Tangentrum till inbäddning (s. 92-96): Låt M vara en n-dimensionell mångfald och låt $i : M \to \mathbb{R}^N$ vara en inbäddning. För $p \in M$ och karta (x, U) vid p har vi

$$(i \circ x^{-1})_*\Big|_{x(p)} : \mathbb{R}^n_{x(p)} \to \mathbb{R}^M_{i(p)}$$

och man ser att bildrummet till $(i \circ x^{-1})_*\big|_{x(p)}$ har dimension n ty x karta.
Låt (y, V) vara annan karta vid p. P.g.a $(i \circ x^{-1})_* = (i \circ y^{-1})_* \circ (y \circ x^{-1})_*$ och rang $y \circ x^{-1} = n$ har vi att bildrummet till $(i \circ x^{-1})_*\big|_{x(p)}$ ej beror av valet av karta. Vi betecknar det $(M, i)_p$ och definierar $T(M, i) = \cup_{p\in M}(M, i)_p$.

Vektorbunt, bunt–avbildning, ekvivalens, sektion (s. 96–114): Bli inte förvirrade av definitionen av n–plane bundle, s. 96–97.
Låt V vara vektorrum. En mångfald B tillsammans med en avbildning $\pi : B \to M$ (π kallas projektion, antas vara kontinuerlig och på), sägs vara en *vektorbunt* (vector bundle) med totalmångfald B, basmångfald M och fiber V om det gäller att

- $\forall p \in M : \pi^{-1}(p) \cong V$ (som vektorrum).
- $\forall p \in M\ \exists U \ni p : \pi^{-1}(U) \cong U \times V$.

Man kollar lätt att dessa villkor är uppfyllda för $T(M, i)$ som alltså är en vektorbunt med fiber $\mathbb{R}^n$. $T(M, I)$ är prototypen till TM, *tangentbunten* till M. Thm. 1, s. 101 visar att det finns en bunt TM till varje C^∞ mångfald M och att det till C^∞ avbildningar finns en naturlig bunt–avbildning som ges av pushforward. Satsen använder definitionen i punkt 1 nedan. Jag föredrar att använda definitionen som ges av punkt 3 nedan, se Thm. 3.

Man använder ofta beteckningen $\xi = \pi : B \to M$ och refererar till bunten som ξ.
Låt $\xi_i = \pi_i : B_i \to M_i$ vara vektorbuntar. En avbildning $\tilde{f} : B_1 \to B_2$ är en *bunt–avbildning* (bundle map) om det finns en avbildning $f : M_1 \to M_2$ så att $f \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \tilde{f}$ (d.v.s. $\tilde{f}$ avbildar fibrer till fibrer) och $\tilde{f} : \pi_1^{-1}(p) \to \pi_2^{-1}(f(p))$ är linjär.
En bunt–avbildning $\tilde{f} : B_1 \to B_2$ sägs vara en bunt–ekvivalens om den motsvarande $f : M_1 \to M_2$ är homeomorfism och $\tilde{f} : \pi_1^{-1}(p) \to \pi_2^{-1}(f(p))$ är isomorfism. Vi skriver $\xi_1 \cong \xi_2$.
En vektorbunt $\xi = \pi : B \to M$ med fiber $\mathbb{R}^k$, (k kallas *fiberdimensionen*) sägs vara *trivial* om $B \cong M \times \mathbb{R}^n$.
Låt $\xi = \pi : B \to M$ vara en vektorbunt. En avbildning $s : M \to B$ kallas *sektion* av ξ om $\forall p \in M, s(p) \in \pi^{-1}(p)$, d.v.s. om $\pi \circ s = \text{id}$.
En vektorbunt med fiber $\mathbb{R}^k$ är trivial om och endast om man kan göra ett globalt val av k linjärt oberoende sektioner.
Allt ovan har sin naturliga differentiabla motsvarighet.
$T(M, i)$ och därmed också TM är i allmänhet ej (globalt) trivial, exempel på detta ges av S^2 (varje vektorfält på S^2 har nollställe) eller Möbiusbandet (det finns ett icke försvinnande vektorfält men ej två linjärt oberoende).
Man kan visa att TS^n är trivial om och endast om $n = 1$, $n = 3$ eller $n = 7$.
Tangentvektorer till M som derivationer (s. 106–111, Thm. 3): Låt M vara n-dimensionell C^∞ mångfald. Vi vill nu komma åt $TM = \cup_{p \in M} M_p$ på ett mera direkt sätt, det finns (minst) tre naturliga sätt att definiera M_p utan att referera till en inbäddning.

1. ekvivalensklasser av vektorer: låt $p \in M$, låt (x, U), (y, V) kartor vid p, definiera ekvivalensrelation genom $(p, x, v) \sim (p, y, v')$ omm $(y \circ x^{-1})_* v = v'$. ekvivalensklasser av kartor och vektorer m.a.p. $\sim$ kan visas vara n-dimensionella vektorrum, detta ger M_p.

2. ekvivalensklasser av kurvor: c_1, c_2 kurvor genom p, kan anta $c_1(0) = c_2(0) = p$. Definiera $c_1 \sim c_2$ om $(x \circ c_1)'(0) = (x \circ c_2)'(0)$ för alla kartor x vid p. Detta ger ett n-dimensionellt vektorrum M_p.

3. mängden av derivationer vid $p \in M$ av C^∞ funktioner på M kan visas vara isomorft med $\mathbb{R}^n$, detta ger M_p.

Det (i min mening) intressantaste sättet att definiera tangentrummet M_p är genom karaktäriseringen i punkt 3 ovan.
Låt $C^\infty(M)$ beteckna rummet av C^∞ funktioner på M. En derivation på $C^\infty(M)$ är en linjär avbildning $\ell : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ så att $\ell(fg) = (\ell f)g + f(\ell g)$ (Leibniz' regel). Man visar att om $\mathbf{1}(p) = 1$ betecknar den konstanta funktionen 1 gäller $\ell \mathbf{1} = 0$ och att om $f = g$ i öppen omgivning U gäller $\ell f = \ell g$ i U.
Nu kan man definiera M_p, tangentrummet vid $p \in M$ som mängden av derivationer vid p av $C^\infty(M)$. Man visar att detta blir ett n-dimensionellt vektor–rum

och att vi har ett lokalt uttryck $\ell = \sum_{i=1}^n \ell(x^i)\partial_{x^i}$. Dvs. en bas för M_p ges av $\{\partial_{x^i}\}_{i=1}^n$.
Nu definierar vi tangentbunten till M som $TM = \cup_{p\in M} M_p$. Då har vi en naturlig projektion $\pi : TM \to M$. Man kan visa att TM är en C^∞ mångfald av dimension $2n$ och att TM är lokalt trivial.
C^∞ **strukturen på** TM**:** En kortfattad beskrivning av C^∞ strukturen på TM ges av följande: Låt $X \in TM, p = \pi(X), (x, U)$ karta vid p. För $Y \in \pi^{-1}(U)$, definiera funktioner $Y^1, \ldots Y^n$ genom $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \partial_{x^i}$. Då kan vi definiera avbildning (lokal trivialisering) $\psi_x : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ genom $\psi_x(Y) = (\pi(Y), Y^1, \ldots, Y^n) \in U \times \mathbb{R}^n$. Dessa lokala trivialiseringar tillsammans med M's C^∞ struktur definierar en C^∞ struktur på TM. Man ser att om x, y är kartor vid p har vi $\psi_x \circ \psi_y^{-1} = \mathrm{id} \times \psi_{xy}$ där $\psi_{xy}(p) = (x \circ y^{-1})_*(p) \in Gl(n)$ är C^∞. Vidare gäller $\psi_{xy} = \psi_{yx}^{-1}$ samt $\psi_{xy}\psi_{yz} = \psi_{xz}$ (kocykelvillkoret).
Pushforward på mångfalder: Nu kan vi flytta definitionen av pushforward till mångfalder. Om $f : M \to N$ är C^∞ definierar man en bunt–avbildning $f_* : TM \to TN$ en C^∞ genom att använda definitionen av pushforward från $\mathbb{R}^n$ och arbeta lokalt i kartor.
Vektorfält: C^∞ vektorfält är C^∞ sektioner av TM (detta är väldefinierat ty TM har differentiabel struktur). Rummet av C^∞ sektioner av TM kan betecknas $C^\infty(TM)$.
Låt $X, Y \in C^\infty(TM)$ och $f \in C^\infty(M)$. Då har vi naturligt definierat $X + Y \in C^\infty(TM)$, $fX \in C^\infty(TM)$. I termer av lokala koordinater har vi $X = \sum_i X^i \partial_{x^i}, Y = \sum_i Y^i \partial_{y^i}$, $X + Y = \sum_i (X^i + Y^i)\partial_{x^i}$, $fX = \sum_i f X^i \partial_{x^i}$.
Obs. att vektorfält verkar som derivationer på $C^\infty(M)$: om $f, g \in C^\infty(M), X \in C^\infty(TM)$ så gäller $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$. Varje derivation (eller partiell differentialoperator av ordning 1) på $C^\infty(M)$ kan således identifieras med ett vektorfält.
Begreppet orientering av TM återkommer vi till i samband med differentialformer.

Problem, Kap 3: 14,15,17,18,19,24,25,26,32