Kapitel 2. I Kapitel 2 definieras differentiabla mångfalder. En differentiabel C^∞ mångfald är en topologisk mångfald som har en maximal differentiabel atlas, d.v.s. en maximal samling $\mathcal{A}$ av kartor så att om (x, U) (y, V) är kartor då är $x \circ y^{-1}$ och $y \circ x^{-1}$ C^∞ (där de är definierade). Spivak kallar dessa C^∞ relaterade kartor. En maximal differentiabel atlas på M kallas även C^∞ struktur på M.
C^∞ mångfalder med rand (s. 42) definieras analogt med tidigare. Om M är n-dimensionell mångfald med rand ärver randen ∂M en differentiabel struktur från M och blir C^∞ mångfald, se problem 12.
Standard exemplen på mångfalder som vi diskuterade i Kap. 1 har naturlig C^∞ struktur, t.ex. $\mathbb{R}^n$, S^n $\mathbb{T}^n$, $\mathbb{P}^n$ etc.
Man kan "klistra" ihop differentiabla mångfalder på ett liknande sätt som man kan "klistra" ihop topologiska mångfalder. På så sätt kan man konstruera många exempel. Se problem 14, Kap. 2.
Man kan konstruera "massor" av C^∞ funktioner på en C^∞ mångfald. Lemma 2 säger att om $C \subset U \subset M$ med C kompakt och U öppen, då kan vi hitta $f : M \to [0, 1]$ så att $f\Big|_C = 1$ och $\operatorname{supp}(f) \subset U$.
En diffeomorfism är en C^∞ homeomorfism vars invers är C^∞. Observera att $f : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{B})$ är diffeomorfism om och endas om $x \circ f \in \mathcal{A} \Leftrightarrow x \in \mathcal{B}$, dvs. $x \circ f$ karta (vid p) som ingår i C^∞ strukturen på M om och endast om x karta (vid $f(p)$) som ingår i C^∞ strukturen på N.
Man klassificerar differentiabla mångfalder upp till diffeomorfism (precis som man klassificerar topologiska mångafalder och rum upp till homeomorfism). Obs. att det kan finnas flera icke-ekvivalenta topologiska strukturer på en given topologisk mångfald, t.ex. S^7, $\mathbb{R}^4$, se s. 39.
Om $f : M \to N$ är C^∞ definierar man rang f vid p som rangen hos jakobianen av $y \circ f \circ x^{-1}$ där x är karta vid p och y är karta vid $f(p)$.
Om $f : M^n \to N^m$ (dvs. $\dim M = n, \dim N = m$) är C^∞ kallar vi $p \in M$ kritisk om rang $f < n$ vid p. Mängden av kritiska punkter betecknas C, $q \in f(C)$ kallas kritiskt värde, $q \in N \backslash f(C)$ kallas reguljärt värde. Obs att $q \in N \backslash f(M)$ är reguljärt värde.

Genom att använda kartor kan vi karaktärisera mängder med mått noll på en mångfald på ett invariant sätt. Om $A \subset M$ har mått noll och $f : M \to N$ är C^∞ gäller att $f(M)$ har mått noll i N.

noll–mängder och Sards sats spar vi till senare

Sards sats säger att $f(C)$ är nollmängd i N. Orsaken är att vid en kritisk punkt har inte jakobianen till f full rang och därför gäller där att "en dimension kläms ihop", med hjälp av slätheten hos f kan man göra ett lokalt argument som visar satsen.
$f : M^n \to N^m$ är immersion om rang $f \equiv n$ OBS att detta gäller endast om $m \geq n$. $f(M)$ sägs vara immerserad (vad heter det på Svenska??) delmångfald.
Om $f : M \to N$ är immersion och f är homeomorfi på $f(N)$ (m.a.p. den inducerade topologin) kallas f inbäddning. Då är $f : N \to f(N)$ diffeomorfism m.a.p. den C^∞ struktur som $f(N)$ ärver från M.

Observera exemplen på patologier hos immersioner på sid. 61–63.
Givet en öppen övertäckning $\mathcal{O}$ av M kan man alltid hitta en lokalt ändlig förfining (följer från M parakompakt), man kan arrangera så att förfiningen består av mängder diffeomorfa med $\mathbb{R}^n$ (Thm. 13).
Givet lokalt ändlig öppen övertäckning $\mathcal{O}$ kan man för $U \in \mathcal{O}$ hitta $U' \subset U$ så att $\overline{U'} \subset U$ och samlingen av U' bildar övertäckning (Shrinking Lemma, Thm 14).
Låt $\mathcal{O}$ vara övertäckning av M. Då sägs en samling funktioner $\{\phi_U\}_{U \in \mathcal{O}}$ vara en partition av enheten subordinerad till $\mathcal{O}$ om det gäller att $\operatorname{supp}(\phi_U) \subset U$, för alla $p \in M$, $\phi_U(p) \neq 0$ endast för ändligt många U, $\phi_U(p) \in [0,1]$,

$$\sum_{U \in \mathcal{O}} \phi_U(p) \equiv 1$$

dvs en partition av enheten sönderdelar funktionen 1 i positiva funktioner med litet stöd. Detta är ett enormt viktigt begrepp inom analysen och gör en mängd konstruktioner och argument möjliga genom lokaliseringar och approximationer. Ett exempel på vad man kan visa genom denna typ av teknik är att varje kompakt mångfald kan inbäddas i $\mathbb{R}^N$ för något tillräckligt stort N (Thm 17). Ett mycket svårare resultat är Whitneys inbäddningssats som säger att varje kompakt C^∞ mångfald av dimension n kan inbäddas i $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Övningsproblem, Kap. 1: 9,12,15,17
Övningsproblem, Kap. 2: 3,7,14,19,26,29,33,34
OBS att många av problemen i Spivak är inte direkt av räkne-typ, snarare innehåller ofta formuleringen av problemen en hel del ny information utöver den som finns i texten, det väsentliga är alltså ofta att läsa och begrunda denna information.

Lars Andersson December 15, 1994